॥ हिन्दी बीजगणित ॥

पहिला भाग

जिसको

पश्चिमोत्तरीय जिलों की पाठशालाओं के विद्या-
र्थियों के लिये पण्डित मोहनलाल ने अंग्रेज़ी से
हिन्दी भाषा में उलथा किया
अवध देश के डैरेक्टर आफ़ पबलिक इन्स्ट्रक्शन
श्रीयुत विलियम हैण्डफ़ोर्ड साहिब बहादुर
के हुक्म से

स्थान लखनऊ
मतबअ मुन्शी नवल किशोर में छापा गया
सन १८६५ ई०

॥ हिन्दी बीजगणित ॥

पहिला भाग

जिसको

पश्चिमोत्तरीय जिलों की पाठशालाओं के विद्यार्थियों के लिये पण्डित मोहनलाल ने अंग्रेज़ी से

हिन्दी भाषा में उलथा किया

अवध देश के डैरेक्टर आफ़ पबलिक इन्स्ट्रक्शन

श्रीयुत विलियम हैण्ड फ़ोर्ड साहिब बहादुर

के हुक्म से

स्थान लखनऊ

मतबअ मुन्शी नवल किशोर में छापा गया

सन १८६५ ई०

॥ हिन्दी बीज गणित के प्रथम भाग का ॥

सूची पत्र

॥ हिन्दी बीज गणित ॥

॥ पहिला भाग ॥

जैसे अंक गणित में संख्याओं के स्थान में १, २, ३, ४, आदि अंक लिखते हैं वैसे ही बीज गणित में संख्याओं के स्थान में अक्षर लिखते हैं इस गणित को बीज गणित इस लिये कहते हैं कि इस्से गणित का मूल मालूम हो जाता है और बीज शब्द का अर्थ मूल है और जैसे पानी की भाफ से केवल लोहे की बड़ी भारी नाव हज़ारों मन माल लाद के गंगा में पवन की नाईं उड़ी चली जाती है और दूसरी देशी नाव जिसको हाथ से खींचते हैं उसमें धूएं की नाव की अपेक्षा माल भी बहुत कम लदता है और रेंगती सी जाती है ऐसे ही बीज गणित से बड़े २ कठिन प्रश्न सहज में हो जाते हैं और बहुतेरे प्रश्न ऐसे हैं जो केवल बीज गणित ही से होते हैं अंक गणित से नाम को भी नहीं होते इस बात को सुगम उदाहरण से दिखाते हैं ॥

॥ प्रश्न ॥

वह राशि कौन सी है कि जिसमें १० जोड़ दें तो योग पूर्व राशि से तीन गुना हो जाय ॥

अंक गणित जान्ने वाले तो इष्ट राशि की रीति से इस प्रकार गणित करेंगे ॥

प्रथम कल्पना करो कि २० राशि है तो २० में १० जोड़ने से ३० हुए और तीन गुने २० हैं ६० इसलिये ६० और ३० में ३० का अन्तर रहा दूसरे कल्पना करो कि १० पूर्व राशि हैं तो १० में १० जोड़ने से २० हुए और तीन गुने १० हैं ३० इसलिये १० का अन्तर रहा फिर इष्ट राशि की रीति से तीस गुने १० वा ३०० में से दस गुने २० वा २०० घटाये तो शेष १०० रहे और इस शेष में दोनों अन्तरों के अन्तर का वा २० का भाग देने से ५ पूर्व राशि मिली ॥

बीज के जान्नेवाले इस प्रश्न को इस रीति से करेंगे कल्पना करो कि (य) पूर्व राशि है तो प्रश्न के अनुसार

य + १० = ३य

इसलिये २य = १० और य = ५ पूर्व राशि हुई

बीज के पढ़ने वालों को चाहिये कि दोनों की रीति से जो उत्तर निकला है उनमें देखें कौन सी रीति छोटी और सुगम है बहुतेरे प्रश्न ऐसे हैं कि उनके उत्तर केवल बीज गणित से ही निकलते हैं और अंक गणित से वे किसी रीति पर नहीं निकल सकते हैं इस बात की सत्यता दिखाने के लिये जो यहां कोई उदाहरण लिखते तो वह कुछ भी समझने में न आता। आगे बीज के पढ़ने से यह बात मालूम होगी

॥ परिभाषा ॥

राशि शब्द का अर्थ समूह वा ढेर है और इससे हर एक वस्तु का परिमाण जाना जाता है कि वह तोल आदि में कितनी है वा गिनती में कितनी है इसलिये राशि के समझने के लिये अंक लिखते हैं जैसे मनुष्यों की राशि का परिमाण गिनती से जाना जाता है और कपड़ों का परिमाण गजों की संख्या से जाना जाता है बीज गणित में व्यक्त अर्थात् जानी हुई राशि जैसे १० आदमी २० घोड़े आदि के स्थान में अ, क, ग, आदि अक्षर लिखते हैं और अव्यक्त अर्थात् अनजानी हुई राशि के स्थान में जैसे प्रश्न में पूछा जाय कितने गज कपड़ा है वा कितने मन नाज है इस के स्थान में य, र, ल, व, आदि अक्षर लिखते हैं अक्षरों के रखने में गणित सहज से थोड़े में हो जाती है क्योंकि २२४५६ के स्थान में (अ) लिख सकते हैं ॥

जोड़ना घटाना गुणा भाग आदि के चिन्ह लिखते हैं + यह चिन्ह जोड़ने का है इसे धन कहते हैं द्रव्य के इकट्ठे होने को धन कहते हैं इसलिये जब यह चिन्ह दो राशि के बीच में हो तो जानो कि बाईं ओर की राशि में दाहनी ओर की राशि जोड़नी है जैसे अ+क, अ धन क पढ़ेंगे इसका यह अर्थ है कि अ राशि में क राशि जोड़नी है और कल्पना करो कि अ राशि ५ के बराबर है और क, राशि ७ के बराबर है तो अ+क ५+७ वा १२ के बराबर होगा और जो (ग ४) के बराबर हो तो अ+क+ग को अ धन क धन ग पढ़ेंगे और वह १२+४ वा १६ के तुल्य

होगा ॥

घटाने का चिन्ह – इसे ऋण कहते हैं जब धन को अपने पास से दूसरे को उधार देते हैं उस धन को ऋण बोलते हैं ॥

इसलिये जब यह चिन्ह दो राशि के बीच में हो तो जानो कि बाईं ओर की राशि में दाहनी ओर की राशि घटानी है जैसे अ–क इसे अ ऋण क पढ़ते हैं और इसका यह अर्थ है कि अ राशि में से क राशि घटानी हैं अ के स्थान में १० रक्खो और (क) के स्थान में ६ तो अ–क, १०–६ वा ४ के बराबर होगा और जो (ग), ३ के तुल्य हो तो अ–क–ग इसे अ ऋण क ऋण ग पढ़ेंगे और वह ४–३ वा १ के तुल्य होगा ॥

गुण करने का चिन्ह × इसे गुणित अर्थात् गुणा गया पढ़ते हैं इसलिये जब यह चिन्ह दो राशि के बीच में हो तो जानो कि बाईं ओर की राशि दाहनी ओर की राशि से गुणी जायगी जैसे अ×क इसे अ गुणित क वा क से गुणा हुआ अ पढ़ेंगे और इसका यह अर्थ है कि (अ) राशि (क) राशि से गुणी गई है जो (अ) को ६ मानो और (क) को ४ तो अ×क ६×४ वा २४ के तुल्य होगा ॥

और जो (ग), २ के तुल्य हो तो अ×क×ग इसे अ गुणित क गुणित ग पढ़ेंगे और यह २४×२ वा ४८ के तुल्य है इसी रीति से ३×य का अर्थ ३ गुणित य है वा तीन य है ॥

× इस चिन्ह के स्थान में बहुधा . ऐसा एक चिन्ह कर देते हैं वा कुछ भी चिन्ह नहीं देते और दो राशि के बीच कोई चिन्ह न होने से यह समझ लेते हैं कि दाहनी राशि बाईं राशि

से गुणी गई है जैसे अ × क, अक और अक इन सब से यही जानो कि क राशि अ बार जोड़ी गई है वा अ राशि से क राशि गुणी गई ऐसे ही ७ य से ७ बार य जानो ॥

अ × क × ग, अ.क.ग अकग इन सब का एक ही अर्थ है और ३ यर से य और र की ३ गुना घात जानो परन्तु जो दो राशि वा एक अंक और राशि के बीच कोई चिन्ह नहीं होता है तो हम उन से दो राशि का घात समझते हैं और पढ़ने में शब्द गुणित को छोड़ देते हैं ॥

जैसे अ क और ३ य को पढ़ने में अ क और ३ य पढ़ते हैं इसलिये ३ × य और ३ × य वा तीन गुना य और ३ धन य को एक ही न समझो परन्तु अंक गणित में जोड़ने का चिन्ह बहुधा नहीं लिखते इसलिये जब दो अंकों के बीच कोई चिन्ह नहीं होता है तो हम उनका योग समझते हैं जैसे २ $\frac{१}{२}$ का अर्थ २ + $\frac{१}{२}$ है और २३ का अर्थ २० + ३ और दो अक्षर वा एक अंक और एक अक्षर के बीच गुणा करने में कोई चिन्ह नहीं रखते परन्तु जब दो अंकों को गुणा करना होता है तो उनके बीच × यह चिन्ह कर देते हैं और . यह चिन्ह इसलिये नहीं देते हैं इसके देनेसे दशांश चिन्ह का मान हो सकता है ॥

३ × क के ४ × ३ तुल्य है

य × ७ के ७ × ५ तुल्य है

६ × १० के १० × ६

अ × क के क × अ ०००००

अ क के क अ ००००

(६) जिन राशियों के गुणा करने से घात मिलता है उनमें से प्रत्येक को घात का गुणक रूप अवयव कहते हैं ॥

जैसे ३५ के ५ और ७ गुणक रूप अवयव हैं क्योंकि ५×७ के ३५ तुल्य हैं और ३ य के ३ और य गुणक रूप अवयव हैं और अ क के अ और क गुणक रूप अवयव हैं ॥

ऐसे ही ८×९ वा ७२ में ८ और ९ गुणक रूप अवयव हैं जो राशि दो वा अधिक राशियों के गुणा करने से नहीं बन सकती हो तो उसके गुणक रूप अवयव नहीं होते हैं ॥

जैसे ७, १३। १७। में ७ के १ और ७ ही गुणक रूप अवयव हैं और १३ में १ और १३ और १७ में १ और १७ गुणक रूप अवयव हैं इनके सिवाय और कोई दो अंक गुणक रूप अवयव नहीं हैं अ क वा क अ राशि में क का गुण अर्थात् गुणक अ है वा अ का गुणक क है ॥

जैसे साझे में एक मनुष्य को दूसरे मनुष्य का साझी कहते हैं और दूसरे मनुष्य को भी पहिले का साझी कहते हैं ३ य में ३ गुणक है क्योंकि य को ३ गुणा करने से घात ३ य के तुल्य होता है ॥

और ३ यर में यर का ३ गुण है र का ३ य गुण है और (३र) का (य) गुण है और २(अ क ग) में (ग) का २अक गुण है (क) का २ अ ग गुण है अ का २ क ग गुण है और अ क ग का २ गुण है (अ) राशि के १ और अ ही गुणक रूप अवयव हैं इसलिये अ का गुण १ है ॥

गुण से राशि को गुणा करने से यह समझो कि गुण की जितनी संख्या होगी उतनी बार राशि जोड़ी गई है जैसे ३ यर का अर्थ है कि ३ बार यर वा ३ यबार र अर्थात र का गुण ३ य है वा ३ र वा र य इसमें य का गुण ३ र है और केवल (अ) से जानो कि अ राशि एक गुनी है इस कारण उसका १ गुण

है गुणने में ३य बार वा २ अंक बार कहना ठीक है क्योंकि हर एक अक्षर का अर्थ एक राशि वा संख्या है जैसे ३ य २ नें जो य के स्थान में १० रक्खें तो ३ य ३० के तुल्य होगा और ३ य बार २, ३० २ के तुल्य होगा ॥

भाग देने का चिन्ह ÷ इसको भाजित वा भाग दिया गया पढ़ते हैं और जिन दो राशियों के बीच यह चिन्ह होता है तो जानो कि बांई ओर की राशि में दाहिने ओर की राशि का भाग लगा है जैसे अ ÷ क इसे अ भाजित क वा अ में क का भाग पढ़ेंगे ॥

और ८ ÷ ४, २ के तुल्य है परन्तु बहुधा इस ÷ चिन्ह को नहीं लिखते क्योंकि $\frac{अ}{क}$ भिन्न का यही अर्थ है जो अ ÷ क का है ऐसे ही $\frac{८}{४}$, ८ ÷ ४ के तुल्य है क्योंकि दोनों २ के तुल्य हैं॥

जो (८) परिभाषा ऊपर लिखी हैं उन के अभ्यास के लिये उदाहरण लिखते हैं। जो अ १० के तुल्य हो, क, ३ के और य ७ के तो बतलाओ कि नीचे जो राशि लिखी हैं वे कौन से अंकों के तुल्य होंगी ॥

॥ १ अभ्यास के लिये उदाहरण ॥

(१) अ + क + य
(२) अ + क − य
(३) अ − क + य
(४) अ − क − य
(५) २अ − य
(६) ४अ + ३क − २य
(७) ७अ + २क − २य
(८) ५अ − ३क − ४य
(९) २अक + ३य
(१०) २अ + ५ − ३कय + १०
(११) ७अक − अकय
(१२) ३अ + कय − यय

(१३) ३ अय में य का गुण क्या है ॥

(१४) ६ अकय में य का गुण क्या है ॥

(१५) ६ अकय में कय का गुण क्या है

(१६) २ अ, २ अक, अ क अ, ३ अकय, म अ, म यय, य अ य, और (अकयर) प्रत्येक राशि के अ का गुण क्या है ॥

(१७) २५ का ऐसा गुणक क्या है कि जो उस्से २५ को गुण दें तो घात १२५ होजाय

(१८) ३+य और ३य में क्या अंतर है और कल्पना करो कि य ७ के तुल्य है

(१९) ३ अ+य और ३ अ − य में क्या अंतर है जब कि अ ५ के और य ६ के तुल्य है ॥

(२०) ३ अ+य और ३ अय में क्या अंतर है जब कि अ ३ के तुल्य और य २ के तुल्य है ॥

जब कि अ १० के तुल्य है और क ३ के तुल्य और ७ के तो बताओ कि

(२१) ३ अय ÷ ७ किसके तुल्य है ॥

(२२) ३ अय ÷ ७ क किसके तुल्य है ॥

(२३) $\frac{\text{२ अ+य}}{\text{क}}$ किसके तुल्य है ॥

(२४) $\frac{\text{३क+३य}}{\text{अ}}$ किसके तुल्य है ॥

(२५) $\frac{\text{अ − य}}{\text{क}}$ किसके तुल्य है ॥

(२६) $\frac{\text{३ अ}}{\text{क}} + - \text{२य} - \frac{\text{अकय}}{\text{२१ अ}}$ किसके तुल्य है ॥

(२७) $\frac{\text{५ अय}}{\text{क}} - \frac{\text{५क+अ}}{\text{२य-३क}}$ किसके तुल्य है ॥

(२८) $\frac{\text{३य}}{\text{४अ+३}} + \frac{\text{४कय}}{\text{१०अ-२६}}$ किसके तुल्य है ॥

(२९) $\frac{\text{२अ+४क}}{\text{३य−अ-क}} - \frac{\text{अ-२क}}{\text{य−क}}$ किसके तुल्य है ॥

(३०) $\frac{\text{म अ}}{\text{क+य}} + \frac{\text{नक}}{\text{अ-य}} - \frac{\text{पय}}{\text{अ-क}}$ किसके तुल्य है ॥

जो एक राशि को उसी राशि से कई बार गुण करे तो इसे घात क्रिया कहते हैं इसके नीचे उदाहरण लिखते हैं॥

अ×अ को $अ^2$ यों लिखते हैं और उसे (अ) का वर्ग वा अवर्ग वा अ का दूसरा घात कहते हैं॥

अ×अ×अ को $अ^3$ यों लिखते हैं॥

और उसे अ का घन वा अ घन वा अ का तीसरा घात कहते हैं॥

अ×अ×अ×अ को $अ^4$ यों लिखते हैं॥

और उसे अ के वर्ग का वर्ग वा अवर्गवर्ग वा अ का चौथा घात कहते हैं परन्तु याद रक्खो कि अ और $अ^1$ का अर्थ एक ही है

और अ और $अ^1$ में अंतर है आगे पढ़ने से जानोगे कि $अ^0$, १ के तुल्य है राशियों के ऊपर दहनी ओर जो १ २ ३ ४ आदि अंक लिखे जाते हैं उन्हें घात मापक कहते हैं क्योंकि उन से राशियों के घात का प्रमाण जान पड़ता है॥

अ+अ को २अ यों लिखते हैं अ×अ को $अ^2$ लिखते हैं॥

जो अ, ४ के तुल्य हो तो २अ, ८ के तुल्य होगा॥

और $अ^2$, १६ के तुल्य और यह भी याद रक्खो कि $२अ^2$ का अर्थ अवर्ग दूना है और न कि २अ का वर्ग॥

१० घात क्रिया से उलटी मूल क्रिया होती है इस्से वह मूल राशि निकल आती है जिस में घात क्रिया हुई हो। जैसे एक राशि का वर्गमूल उस राशि को कहते हैं जिस का वर्ग इष्ट राशि के तुल्य हो ऐसे ही किसी एक राशि का घन मूल उस राशि को कहते हैं जिसका घन इष्ट राशि के तुल्य हो॥

९ का वर्गमूल ३ है क्योंकि ३ का वर्ग वा ३×३, ९ के तुल्य है २७ का ३ घनमूल है उसका घन वा ३×३×३, २७ के तु

ल्य है ऐसे ही अ^{२} का वर्गमूल (अ) है क्यों कि अ×अ, अ^{२} के तुल्य है अ^{३} का घनमूल (अ) है क्यों कि अ×अ×अ, अ^{३} के तुल्य है वर्ग मूल का चिन्ह $\sqrt[२]{\ }$ वा केवल $\sqrt{\ }$ है घनमूल का चिन्ह $\sqrt[३]{\ }$ है ॥

बहुधा वर्गमूल का चिन्ह यह $\sqrt{\ }$ लिखा जाता है परन्तु $\sqrt[२]{\ }$ यह चिन्ह ठीक है जैसे जब $\sqrt{अ}$ लिखा है तो अ का वर्गमूल जानो ॥

जिस रीति से अ+अ को २अ लिखते हैं उसी तरह $\sqrt{अ}+\sqrt{अ}$ इसे अ का वर्गमूल दूना जानो ॥

इसे २$\sqrt{अ}$ यों लिखते हैं और २ गुणा अ का वर्ग मूल पढ़ते हैं $\sqrt{अक}$ इस का अर्थ (अ) गुना (क) का वर्गमूल है

$\sqrt{अ+क}$ इसका अर्थ अ धन क वा अ और क के योग का वर्गमूल और जिस राशि का मूल निकालना हो उस संपूर्ण राशि के ऊपर मूल के चिन्ह $\sqrt{\ }$ के ऊपर का भाग बढ़ाकर खींच दो जो अ के स्थान में १६ लिखें और क के स्थान में ९ तो $\sqrt{अ+क}$, $\sqrt{२५}$ वा ५ के तुल्य होगा और $\sqrt{अक}$ $\sqrt{१४४}$ वा १२ के तुल्य होगा $\sqrt{\frac{अ}{क}}$ इसका अर्थ भिन्न $\frac{अ}{क}$ का वर्गमूल है ॥

परन्तु $\frac{\sqrt{अ}}{क}$ इसका अर्थ यह है कि अ के वर्ग मूल में क का भाग लगा॥

॥२ अभ्यास के लिये उदाहरण॥

(१) अ^{२} क^{२} − ग^{२}

(२) १२अ^{२} + ३क^{२} − ४ग^{२}

(३) ५अकग − २२क^{२} + ३ग^{३}

(४) अ^{२}क + क^{२}ग

(५) १२अ^{२}क^{२} + २० अक − २कग^{२}

(६) $\frac{क^{२}}{अ} + \frac{अ^{२}}{क} \frac{ग^{२}}{२अ}$

(७) $\frac{८अक^२}{३ग} - \frac{९अक^२}{२कग}$ (८) $मअ^२ + नक^२ - पग^२$

(९) $२\sqrt{क} - \sqrt{२ग}$ (१०) $\sqrt{अक^२} - \sqrt{अक}$

(११) $अ + \sqrt{अ} - \sqrt{अक} + २\sqrt{२कग}$

(१२) $\sqrt{२ग+क} - \sqrt{२क-२अ}$ (१३) $म\sqrt{\frac{क}{अ}} + न\sqrt{\frac{कग}{२}} - प\sqrt{२अग}$

(१४) $\sqrt[३]{अग} + \sqrt{४क} - २\sqrt[३]{ग}$

(१५) $\sqrt{क+ग-अ} - \sqrt[३]{३कग}$

(१६) $\sqrt[३]{अ} + \sqrt{२ग} + \sqrt[३]{\frac{कग}{८}} - ४\sqrt[३]{क-अ}$

(१७) जो अ २ के तुल्य हो तो २अ और $अ^२$ में क्या अन्तर होगा ॥

(१८) जो य, १०० के तुल्य हो तो $२\sqrt{य}$ और $२\times\sqrt{य}$ में क्या अन्तर होगा ॥

(१९) जो य, ६४ के तुल्य हो तो $\sqrt[३]{य}$ और $\sqrt[२]{य}$ में क्या अन्तर होगा ॥

(२०) जो अ, २ के तुल्य हो और क ८ के तुल्य तो $\sqrt{अ\div क}$ और $\sqrt{अ+क}$ में क्या अन्तर क्या होगा ॥

(२१) जो अ, १६ के तुल्य हो और क, ४ के तुल्य तो $\sqrt{\frac{अ}{क}}$ और $\sqrt{\frac{अ}{क}}$ में क्या अन्तर होगा ॥

११ = इस अंक को तुल्य है पढ़ते हैं ॥

जैसे २ + ४ = ६ अ + य = क इसे अ धन य तुल्य है क के यों पढ़ते हैं और इसका अर्थ यह है कि अ और य का योग क के तुल्य है

$८ \div ४ = २$ और $\sqrt{२५} = ५$

< इस चिन्ह को छोटा है पढ़ते हैं॥

जैसे अ<क इस का अर्थ यह है कि अ, क से छोटा है॥

∴ इस चिन्ह को इसलिये पढ़ते हैं॥

∵ इस चिन्ह को क्योंकि पढते हैं॥

१२ जब कि एक राशि के कई खंड हों और उनके साहिनी ओर धन ऋण चिन्ह लगे होंतौ हरएक खण्ड को पद कहते हैं और राशि के जितने खंड हों उतने ही पद की राशि कहावेगी। जैसे अ राशि एक पद की है ऐसे ही २अ, अक, अक, अ क ग, ये एक पद की राशि हैं और अ+ग दो पद की राशि है॥

(१३) किसी एक पद की राशि के बाईं ओर धन चिन्ह हो उसे धन राशि कहते हैं॥

और जो किसी एक पद की राशि के बाईं ओर ऋण चिन्ह हो उसे ऋण राशि कहते हैं॥

क्योंकि ०+(अ) वा +(अ) वा अ एकही अर्थ इसलिये जो एक पद की राशि के बाईं ओर + वा - का चिन्ह नहो तौ उसे धन राशि कहते हैं॥

जो एक राशि कई पदों की हो और उसके धन पदों का योग ऋण पदों के योग से अधिक हो वा कम हो तौ संपूर्ण राशि भी धन होगी वा ऋण॥

जैसे कोई व्योपारी देखा चाहता है कि मेरे पास कितना धन है तौ पहिले वह अपने पास जो कुछ रुपया होगा उसे गिनेगा और कल्पना करो कि उसके पास का धन अ है फिर जो कुछ उसने रुपया और आदमियों को उधार

दिया हो उसे गिनेगा और मानो कि उसे उधार में क रुपये लेने हैं तो उसके पास संपूर्ण धन अ + क होगा परन्तु उसे कुछ रुपया देना भी है और वे संपूर्ण धन से कम हैं और उसका मान − ग जानो तो व्योपारी के पास शेष धन ले दे के अ + क − ग बचेगा और जो संपूर्ण धन से अधिक रुपये देने होंगे तो उस के पास कुछ न बचेगा परन्तु जितना कि ऋण धन से अधिक होगा उतना शेष ऋण उसे और चुकाना होगा और याद रक्खो कि जब केवल राशि के चिन्ह का वर्णन हो तो + वा − चिन्ह जानो और समझो कि राशि धन है वा ऋण ॥

॥ प्रश्न ॥

(१) बीज गणित किसे कहते हैं और उसका प्रयोजन क्या है ॥

(२) राशि का क्या अर्थ है ॥

(३) बीज गणित में राशियों के स्थान में अक्षर क्यों लिखते हैं

(४) अ + क, अ धन क इसका क्या अर्थ है क्या २ + ५ इसका यह अर्थ है कि दो में पांच जोड़े जायगे ॥

(५) अंक गणित में २३ का क्या अर्थ है और बीज गणित में अंक इसका क्या अर्थ है ॥

(६) कैसी राशि के स्थान में २अ लिखा है ३अ और ३अ − क इन में कौनसी राशि बड़ी है

(७) जो अ, १ के तुल्य हो क २ के तुल्य और ग ३ के तुल्य तो बताओ कि अ क ग, १२३ के तुल्य होगा वा नहीं और जो उसके तुल्य न हो तो किस अंक के तुल्य होगा ॥

(८) अंक गणित में ५ $\frac{२}{३}$ इसका क्या अर्थ है और जो

बीज गणित मे अ $\frac{क}{ग}$ इसका क्या अर्थ है॥

(९) धन राशि की परिभाषा के अनुसार + य इसका क्या अर्थ है॥

(१०) एक राशि के गुणक रूप अवयव ६ और ७ हैं तो वे दोनो राशि एक हैं वा नहीं एक हैं तो क्या है और बताओ कि वह कौन सी राशि है जिसके वे गुणक रूप अवयव हैं क्या अ क ग इसका अ क गुणक रूप अवयव है अ क ग जो अक्षर लिखे हैं उन में प्रत्येक दो अक्षर के बीच में कौन सा चिन्ह लुप्त है और दो अक्षरों के पास होने से उनका क्या अर्थ होता है॥

(११) लिखो कि अक−ग शब्द से अक ऋण ग इसका क्या अर्थ हुआ॥

(१२) लिखो कि २अक+३ शब्द से दो अक धन ३ इसका क्या अर्थ है॥

॥संकलन वा जोड़ना॥

जिन राशियों के केवल अंक गुणक भिन्न हैं तो उन राशियों को सजातीय राशि कहते हैं॥

जैसे ४ अ, ७ अ, १० अ, समान जाति की राशि ऐसे ही ३ अ क, ६ अ क, समान जाति की राशि हैं अ३ अ५ अ ये भी समान जाति की राशि हैं॥

जिन राशियों के भिन्न अक्षर होते हैं उन्हें विजातीय राशि कहते हैं॥

जैसे अ, क, ये विजातीय राशि हैं और २ अ, ३ क, ४ य,

यह भी विजातीय राशि हैं ऐसे ही अ,क, $अ^२$,क, $अ^२क^२$ विजातीय राशि हैं॥

॥ उदाहरण ॥

(१) ५अ−३क, ४अ+७क−८अ−५क इनमें से सजातीय राशि एक ओर इकट्ठी करो और उनके चिन्ह भी ज्यों के त्यों रख दो॥

+५अ	−३क	उत्तर लंब रूप रेखा के एक एक ओर की
+४अ	+७क	राशि सजातीय हैं और दोनों ओर की
−८अ	−५क	राशि मिलकर विजातीय हैं॥

(२) $अ^३$+३$अक^२$+३$अ^२क$+२$अ^३$+२$क^३$+५$अक^२$−$अग^२$−$अ^२क$−$क^३$ इसमें से सजातीय राशियों को अपने २ चिन्ह सहित एक स्थान में इकट्ठी करो॥

+ $अ^३$	+३$अक^२$	+३$अ^२क$	−$अग^२$	+२$क^३$
+ $अ^३$	− $अ^२क$	+५$अक^२$		− $क^३$

(३) २अ−३क+७कग+$क^२ग$−५अकग+२यर−३$य^२$+५$क^२$+७$क^२ग$−९अ−२$क^२$+६क+१०अ−५$य^२$−यर+$य^२$+अकग−२कग+$ग^२$−क−३$ग^२$ इसमें से समान जाति की राशियों को अपने २ चिन्ह सहित इकट्ठा करो॥

+२अ	−३क	+७कग	+$क^२ग$	−५अकग
−९अ	+६क	−२कग	+७$क^२ग$	+अकग
+१०अ	− क			
+२यर	−३$य^२$	+५$क^२$	+$ग^२$	
− यर	−५$य^२$	−२$क^२$	−३$ग^२$	
	+ $य^२$			

॥ २५ सजातीय राशियों के जोड़ने की रीति ॥

प्रथम जब जिन राशियों का योग करना हो उनके बाईं ओर एक से चिन्ह हों चाहे वे सब धन हों वा ऋण हों तो उन के योग करने की यह रीति है कि सब गुणक अंकों का योग करो उसे नया गुणक मानो और उस के बाईं ओर सजातीय राशि का चिन्ह लिखकर उस गुणक के दाहनी ओर राशि के अक्षर लिखदो ॥

जैसे ५-अ में ४-अ जोड़ने से ९-अ होते हैं क्यों कि ५-अ का अर्थ ५ गुना अ वा अ+अ+अ+अ+अ+ है और ऐसे ही ४ अ का अर्थ ४ गुना (अ) वा अ+अ+अ+अ है इसलिये ५ अ में ४ जोड़ने से ९ गुना (अ) होता है वा ९ (अ) हुआ — २ क इसका यह अर्थ है कि २ क घटाना है और ऐसे ही — ३ (क) इसका अर्थ यह है कि ३ क घटाना है इस लिये — २क में — ३ क जोड़ने से योग — ५ क के तुल्य है और उसका अर्थ है कि ५ क घटाना है ॥

दूसरे जिन राशियों का योग करना हो उनके चिन्ह भिन्न हों वा कई राशि के चिन्ह धन हों और कई राशियों के चिन्ह ऋण हों तो धन गुणक अंकों का योग करो और ऋण गुणक अंकों का भी योग करो और बड़े योग में से छोटा योग घटा कर शेष के दाहिनी ओर सजातीय राशि के अक्षर लिखदो इस संपूर्ण राशि के बाईं ओर बड़े योग का चिन्ह करदो जैसे ५ अ वा + ५ अ में — २ अ जोड़ना हो तो योग + ३ अ के तुल्य होगा क्योंकि + ५ (अ) का अर्थ यह है ५ अ जोड़ना है और — २ अ का अर्थ यह है कि २ अ घटाना है दोनों को मिलाने से योग ३ (अ) के तुल्य हुआ ॥

३ अ − २ अ − ५ अ और + १० अ को जोड़ना हो तो उनमें १३ अ धन हैं और ७ (अ) ऋण इसलिये योग + ६ (अ) के तुल्य है ॥

− ३ अ, २ अ, ५ अ और − १० अ को जोड़ो उनमें ७ अ धन है और १३ अ ऋण है इस लिये योग − ६ अ के तुल्य है

॥ जोड़ने के उदाहरण नीचे लिखते हैं ॥

२ य	३ अक	− ५ अ	− अक
४ य	५ अक	− ६ अ	− ५ अक
७ य	२ अक	− २ अ	− ३ अक
य	अक	− अ	− २ अक
योग १४ य	१० अक	− १४ अ	− ११ अक

४ अ	२ यर	३ अ^{२}	१५ अक^{२}
− ७ अ	७ यर	२ अ^{२}	− ७ अक^{२}
५ अ	− ६ यर	− ६ अ^{२}	− ५ अक^{२}
− अ	− यर	७ अ^{२}	८ अक^{२}
अ	+ ५ यर	− ४ अ^{२}	− ३ अक^{२}
१० अ	यर	− ५ अ^{२}	− अक^{२}
− ६ अ	− ८ यर	१० अ^{२}	− १० अक^{२}
योग = ६ अ	०	७ अ^{२}	− अक^{२}

तीसरे जब दो वा अधिक पदों की राशियों का योग करना हो तो सजातीय राशियोंका योग अलग २ निकाल लो और इन को अपने २ चिन्ह सहित एक सीध

में रखदो वही उत्तर होगा जैसे २ अ + ३ क को ३ अ + ४ क में जोड़ना है तो २ अ को ३ अ मे जोड़ा तो योग ५ अ हुआ और + ३ क को + ४ क में जोड़ा तो योग + ७ क हुआ इसलिये संपूर्ण योग ५ अ + ७ क के तुल्य हुआ ॥

ऐसे ही जो ३ अ − ४ क को २ अ + ३ क में जोड़ना हो तो २ अ और ३ अ मिलके ५ अ हुए और − ४ क और + ३ क मिल के − क के तुल्य है इसलिये योग ५ अ − क हुआ ॥

२ अ + ३ क का केवल यही अर्थ है कि २ अ में ३ क जोड़ना है ऐसेही ३ अ + ४ क का भी यही अर्थ है कि ३ अ में ४ क जोड़ना है इसलिये जब हम कहैं कि २ अ + ३ क और ३ अ + ४ क इनको जोड़ लाओ तो इसका यह अर्थ साधारण समझा कि २ अ, ३ क, ३ अ, और ४ क को जोड़ना है ॥

अंक गणित में भी जब उच्च जाति और हीनजाति की राशि जोड़नी होती है तो उच्च जाति की राशिओं को अलग जोड़ लेते हैं और हीन जाति की राशियों को अलग जैसे पाइयों में पाई जोड़ते हैं और आने में आने और रुपयों में रुपये ॥

॥ उदाहरण ॥

(१) ५ अ − ३ क और ४ अ − ७ क इनका योग बताओ

५ अ − ३ क	५ अ में ४ अ जोड़ा तो ९ अ
४ अ − ७ क	भया और ३ क घटाने हैं और ७ क
योग = ९ अ − १० क	भी घटाने हैं इसलिये सब १० क

घटाने हैं वा −१० क॥

(२) ५ख − ३क और ४ ख + ७क इनका योग निकालो

५ ख − ३ क
४ ख + ७ क
योग = ९ ख + ४ क

५ ख मे (ख) जोड़ने से योग ९ ख हुआ और ७ क धन में से ३ क ऋण निकाला तो शेष + ४ क रहा॥

(३) ५ ख − ३ क, ४ ख + ७ क और − ८ ख − ५ क इन का योग करो॥

५ ख − ३ क
४ ख + ७ क
− ८ ख − ५ क
योग = ख − क

यहाँ ९ ख धन है और ८ (ख) ऋण इसलिये १ ख वा ख धन रहा और ७ क धन है और ८ क ऋण इसलिये १ क वा क ऋण रहा॥

(४) $३ख^२ + ४कग − घ^२ + १०, −५ख^२ + ६कग + २घ^२ − १५$ और $−४ख^२ − ९कग − १०घ^२ + ३१$ इन का योग करो

॥सजातीय राशियों को एक दूसरे के नीचे रक्खो

$३ख^२ + ४कग − घ^२ + १०$
$−५ख^२ + ६कग + २घ^२ − १५$
$−४ख^२ − ९कग − १०घ^२ + ३१$
योग = $−६ख^२ + कग − ९घ^२ + १६$

सजातीय राशियों की पहिली वल्ली में $३ख^२$ धन है $९ख^२$ ऋण इस लिये $६ख^२$ ऋण वा $−६ख^२$ रहा और दूसरी वल्ली में १० कग धन है और ९ कग ऋण है इस में १ कग वा कग धन वा + कग रहा तीसरी वल्ली में $२घ^२$ धन है और $११घ^२$ ऋण है इस में $९घ^२$ ऋण वा $−९घ^२$ रहा और चौथी वल्ली में ३१ धन है और २५ ऋण इस में १६ धन वा + १६ रहा॥

॥६ विजातीय राशियों के योग करने की रीति॥

भिन्न जाति की राशियों के योग करने में यही अर्थ सम को कि राशियों को अपने २ चिन्ह सहित एक सीध में लिखदो जैसे अ - क, ग - घ, और च इन का अ - क + ग - घ + च योग हुआ॥

- इस का अर्थ यही है कि सब राशि इकट्ठी है और यह याद रक्खो कि अ + क इस का अर्थ है कि अ में क जोड़ना है और यह न समझो कि अ में क जुड़ा हुआ है क्योंकि जब तक अ और क इनके मान वा संख्या न मालूम होंगी तब तक अ और क इनका योग नहीं हो सकता॥

जैसा कोई कहै कि १० मन और ३ सेर पाँच छटाँक का योग क्या है तो उन्हें एक पंक्ति में इस रीति से लिखेंगे मन १०, सेर ३ छटाँक ५ और जो कोई पूछे कि एक कमरे में १० लड़के हैं और दूसरे में ५ हैं तो उनका योग क्या होगा १५ लडके क्योंकि वे एक ही जाति के हैं इसलिये उन्हें जोड़ देंगे परंतु एक हाते में ३ बैल और दूसरे में पांच घोड़े हैं तो उनका योग क्या होगा तो उन्हें अलग २ करके ही बतावेंगे कि ३ बैल हैं और ५ घोड़े हैं यही उनका जोड़ है कुछ उन को जोड़ कर ८ घोड़े वा ८ बैल न बतावेंगे क्योंकि वे विजातीय हैं इसलिये उनका योग नहीं हो सकता और जिन विजातीय राशियों का योग करना होता है उन्हें अपने - चिन्हों समेत एक पंक्ति में लिख देते हैं और उसे ही उन राशियो का योग समझते हैं॥

(२७) जिन राशियों का योग करना हो उन में समानजाति और भिन्नजाति की राशि हो तो २५ प्रक्रम के अनुसार सजातीय राशि का योग करके उसके दाहिनी ओर विजातीय

राशियों को अपने२ चिन्ह सहित रख दो॥

(१८) और इसकी कुछ चिंता नहीं कि योग में अक्षर चाहे जिस क्रम से रक्खो परंतु उनके चिन्ह में कुछ अंतर न पड़े और बहुधा योग के अक्षरों को वर्णों के क्रम से लिखते हैं॥

॥ उदाहरण ॥

(१) अ+२क−ग, अ−५घ+२ग और प+र+३घ इनका योग करो॥

अ+२क−ग

अ−५घ+२ग

+३घ+प+र

योग=२अ+२क+ग−२घ+प+र

अ और अ सजातीय राशि हैं
−५घ और +३घ तथा
−ग और +२ग तथा
और शेष राशि विजातीय हैं

(२) ३अ^2−कग, २क^2−अग, ४ग^2−अक और अ^2+क^2−ग^2 इनका योग करो॥

३अ^2−कग

२क^2−अग

४ग^2−अक

अ^2+क^2−ग^2

योग=४अ^2+३क^2+३ग^2−अक−अग−कग

३अ^2 और अ^2 सजातीय हैं
२क^2 और +क^2 तथा
४ग^2 और −ग^2 तथा
और शेष राशि विजातीय हैं॥

(३) पर−५प^2+२ और र^2+३ इन का योग करो॥

− १, + २, और + ३ सजातीय हैं और शेष राशि विजातीय हैं

$$य र − १$$
$$य^2 + २$$
$$र^2 + ३$$

$$योग = य^2 + य र + र^2 + ४$$

(१८) सजातीय और विजातीय राशियों के योग करने के लिये जो रीति लिखी हैं वे अंक गणित में जो योग करने की रीति लिखी हैं उनसे मिलती हैं जैसे जब हम को ३ सौ और ४ सौ जोड़ने होते हैं तो हम इन सजातीय राशियों के गुण ३ और ४ के योग वा ७ के बाईं ओर सौ लिख देते हैं इसलिये योग ७ सौ के तुल्य हुआ ॥

और हमे ३ सैकड़े ५ दहाई ६ इकाई इन विजातीय राशियों का योग करना हो तो उनको केवल एक सीध में लिख सकते हैं ॥

जैसे ३ सैकड़े + ५ दहाई + ६ इकाई वा सूक्ष्म रीति से ३५६ यों लिखेंगे ॥

॥३॥ अभ्यास के लिये प्रश्न लिखते हैं ॥

(१) अ + क, अ + क इनको जोड़ो ।
(२) अ + क और अ − क इनको जोड़ो ।
(३) अ − क और अ − क इनको जोड़ो ।
(४) अ − क + ग और अ + क − ग इनको जोड़ो ।
(५) अ − क + ग और अ + क + ग इनको जोड़ो ।
(६) १ − २प + ३न और ३म − २न इनको जोड़ो ।
(७) ५म + ३ और २म − ४ ।

(८) ३यर−२य और यर+६य।

(९) ४प−२व+१ और ७−३प इनको जोड़ो।

(१०) ५अक−२कग और अक+कय

(११) ८मन+म और १−न−७मन

(१२) २अय+३कर और अय−कर

(१३) ३अ+२क+४ग और २अ−३क+ग

(१४) यर+य−७ और ३यर−२य+३

(१५) प+व−पव और २पव−३प+२व

(१६) प+२पव+व^{२} और प^{२}−२पव+व^{२}

(१७) ७अक−५अग+१ और अक+६अग−२

(१८) ७य−६र−प−३र−प+र−अ+२र और प+८र

(१९) ७−अ, −८−अ, ७अ−१−अ−१ और ६+अ

(२०) अ−३क+३ग−घ और अ+३क+३ग+घ

(२१) ८य−८र−७ और ३ल$_{२}$−९य+६य+७

(२२) अ^{२}+२अक+क^{२} और २अ^{२}−अक−३क^{२}

(२३) ३य^{२}−६य+५, २य−२−य^{२} और ४−य−२य^{२}

(२४) अग+कघ, कघ−गघ और अग+गघ

(२५) अय−कर, +यर और अय−य−कर−र

(२६) य^{२}−२अय^{२}+अ^{२}य, य^{२}+३अ^{२}य और २अ^{२}−अय^{२}−अ^{२}य

(२७) अ^{२}−३अक^{२}+क^{२}, २क^{२} −३क^{३}+ग, अक^{२}+क^{३} और २अक^{२}+क^{३} इन का योग करो।।

(२८ $\frac{२}{४}$य^{२}+२यर, $\frac{३}{४}$य^{२}−यर+र^{२} और मय+नर इन का योग करो।।

(२९) ४य^{२}र ४अयर−२अ^{२}य+२य^{३} और य^{३}+अयर +अ^{२}य−य^{३}।।

(३०) अघ+कघ−२गघ, ½ अघ ½ कघ और ½ अक +२गघ − अग॥

॥ व्यवकलन वा घटाना ॥

(१९)॥ एक राशि में से दूसरी राशि के घटाने की रीति॥

प्रथम जो राशि सजातीय हों और उन के चिन्ह भी एक से हों अर्थात् सब धन हों वा ऋण तो उन राशियों के अंतर निकालने की यह रीति है कि उन के गुण का अंतर निकाल के उसके बांई ओर सजातीय राशियों का चिन्ह करदे और उनके अक्षर उसके दाहिनी ओर लिखदे जैसे ५अ में से २अ घटाओ क्योंकि ५अ=३अ+२अ इसलिये ५अ में से २अ वा +२अ निकाला तो शेष ३अ रहा॥

−५अ में से −२अ घटाओ क्योंकि −५अ=−३अ−२अ इसलिये −५अ में से −२अ मिला तो शेष −३अ रहा

दूसरे जो राशि सजातीय हों परन्तु चिन्ह भिन्न हों अर्थात् एक राशि धन हो और दूसरी ऋण तो उनके अंतर निकालने की यह रीति है कि राशियों के गुण का योग करके उसके बांई ओर उस राशि का चिन्ह करदो जिसमें दूसरी राशि घटानी हो और उस के दाहिनी ओर सजातीय राशि के अक्षर लिखदो। जैसे −५अ में से +२अ घटाओ इसको −५अ − २अ यों लिखेंगे और इसका यही अर्थ है कि अ राशि ५बार और २बार वा ७बार घटानी है इसे −७अ यों लिखते हैं॥

५अ में से −२अ घटाओ क्योंकि ५अ=७अ−२अ इसलिये ५अ में से −२अ निकाला तो शेष ७अ रहा॥

तीसरे जो राशि विजातीय हों तो उन का अंतर निकालना यही है कि उन राशियों को चिन्ह सहित एक सीध में लिख दो जैसे अ में से क घटाओ तो अ − क यों लिखते हैं अ में से-क घटाओ क्योंकि अ = अ + क − क इसलिये अ में से − क निकाला तो शेष अ + क रहा ॥

॥ ऊपर जो उदाहरण लिखे हैं उन्हें इकट्ठा करके॥
लिखा

५ अ में से २ अथवा + २ अ	घटाया तो शेष + ३ अ रहा
− ५ अ में से − २ अ	घटाया तो शेष − ३ अ रहा
− ५ अ में से २ अथवा + २ अ	घटाया तो शेष − ७ अ रहा
+ ५ अ में से − २ अ	घटाया तो शेष + ७ अ रहा
अथवा + अ में से क वा + क	घटाया तो शेष अ − क रहा
अ वा + अ में से − क	घटाया तो शेष अ + क रहा

ऐसे ही और उदाहरण करने से यह जान पड़ता है कि नीचे जो राशि लिखी हैं वह घटाने के सब प्रश्न के लिये अवश्य होगी

॥ रीति ॥

जिस राशि को घटाना हो उसका चिन्ह बदल दो अर्थात जो उसका चिन्ह + धन हो तो उसके स्थान में − ऋण चिन्ह करदो ॥

और जो उसका चिन्ह − हो तो उसके स्थान में + धन रक्खो और फिर योग करने की रीति से उत्तर निकालो

॥ उदाहरण ॥

(१) अ से	(२) ७ अ से	(३) अ से
अ घटाओ	६ अ निकालो	अ घटाओ
अंतर = २ अ	अ	०

(४) ३अ से
− अ घटाओ
अंतर = ४अ

(५) ७अ से
−६अ घटाओ
१३अ

(६) अ से
− अ घटाओ
२अ

(७) −३अ से
अ घटाओ
अंतर = −४अ

(८) −७अ से
+६अ
−१३अ

(९) −अ से
अ घटाओ
−२अ

(१०) −३अ से
− अ घटाओ
अंतर = २अ

(११) −७अ से
−६अ
−अ

(१२) −अ से
−अ घटाओ
०

(१३) −अ+क से
अ−क घटाओ
अंतर = २अ+२क

(१४) अ−क से
अ+क
−२क

(१५) र+अय से
र−अय घटा०
२अय

(१६) ३अ−४क+६ग से
अ−२क+९ग
अंतर = २अ−२क−३ग

(१७) ७अ−२क+४ग−२
६अ−६क+४ग−१
अंतर = अ+४क−१

(१८) २अ−६अक−अग+५ से
५अ−८अक−२अग−१
अंतर = −३अ+२अक+अग+६

(१९) ३घर−घ²−र²+अ
२घर+घ²+र²−ब
अंतर = घर−२घ²−२र²+अ−ब

(२०) अ²+२अक−३ग²
३अ²−५अक−७ग²
अंतर = −अ²+७अक+४ग²

(२१) ५घ²−४घर+र²
−घ²+५घर+३र²
अंतर = ६घ²−५घर−२र²

(२२) $८अ^{२} + य^{२} - ५क^{२} - ५ग^{२}$
$य^{२} + २क^{२} - ५ग^{२}$
अंतर $= ८अ^{२} - ७क^{२}$

(२३) $य^{३} - ३य^{२} + ६य - १०$
$य^{३} - ४य^{२} + ८य - ९$
अंतर $= य^{२} - २य - १$

(२४) $अ + \frac{१}{२}क + १$
$\frac{१}{२}अ + क + \frac{१}{२}$
अंतर $= \frac{१}{२}अ - \frac{१}{२}क + \frac{१}{२}$

(२५) $\frac{४}{३}य^{२} - \frac{५}{४}यर + \frac{३}{२}य^{२}$
$\frac{१}{३}य^{२} - \frac{१}{४}यर - \frac{१}{२}य^{२}$
अंतर $= य^{२} - यर + २य^{२}$

(२०) क्योंकि अ + क में अ − क जोड़ने से योग २अ के तुल्य है और अ + क में से २अ + क घटाने से अंतर (क) के तुल्य है इस्से यह बात निकलती है कि किसी दो राशि के के अंतर में उनका योग जोड़ा जाय तो वह योग दोगुनी बड़ी राशि के तुल्य होगा और जो अंतर को योग में से घटावें तो शेष दो गुनी छोटी राशि के तुल्य होगा॥

इस रीति से नीचे जो प्रश्न लिखे हैं उन के उत्तर निकल आते हैं यही रीति लीलावती में भी लिखी है उसे संक्रमण कहते हैं परन्तु लीलावती पढ़ने वाले लोग इस गणित का मूल ऐसा नहीं समझते जैसा बीज गणित पढ़ने वाले जानते हैं इसका ब्योरा अभी ऊपर स्पष्ट लिख चुके हैं और इस के उदाहरण आगे लिखते हैं॥

॥ प्रश्न ॥

दो संख्याओं का योग १०० है और उनका अंतर ५० है तो बताओ कि वे संख्या कौन सी हैं॥

दुगुनी बड़ी राशि = १०० + ५० = १५०
इसलिये बड़ी राशि = ७५
और दोनों राशियों का अंतर = ५० है॥

इसलिये छोटी राशि = ७५ − ५० = २५

इस कारण ७५ और २५ दोनों राशि हैं

(२) एक पुरुष और स्त्री की अवस्था मिलकर ७७ वर्ष की है उनमें पुरुष की अवस्था स्त्री की अवस्था से ७ वर्ष अधिक है तो बताओ कि हरएक की अवस्था क्या है॥

बड़े पुरुष की दुगुनी अवस्था = ७७ + ७ = ८४

इसलिये बड़े पुरुष की अवस्था = ४२ वर्ष

और इस कारण दूसरे की उमर = ४२ − ७ = ३५ वर्ष

(३) $\frac{१}{२}$ के ऐसे दो खंड करो कि एक खंड दूसरे खंड से $\frac{१}{४}$ के तुल्य बड़ा हो॥

दोनों खंडो का योग = $\frac{१}{२}$

दोनों खंडो का अन्तर = $\frac{१}{४}$

दोगुना बड़ा खंड = $\frac{१}{२} + \frac{१}{४} = \frac{३}{४}$

इसलिये बड़ा खंड = $\frac{३}{४}$ का $\frac{१}{२} = \frac{३}{८}$

ऐसे ही दोगुना छोटा खंड = $\frac{१}{२} - \frac{१}{४} = \frac{१}{४}$

इसलिये छोटा खंड = $\frac{१}{४}$ का $\frac{१}{२} = \frac{१}{८}$

इस कारण दोनों खंड $\frac{३}{८}$ और $\frac{१}{८}$ हैं॥

॥ अभ्यास के लिये उदाहरण ॥

(१) अ से क − ग घटाओ॥

(२) अ + क − ग − घ में अ − क + ग − घ घटाओ ॥

(३) ६अ − क − ग से अ − क + २ग घटाओ ॥

(४) ८अ + य − ५क − ५ग से य + २क − ५ग घटाओ ॥

(५) ३य + २र − ५ल से २य + ३र + ४ल घटाओ ॥

(६) २अय + कर − ग से अय − कर + ग घटाओ ॥

(७) ३कग − अक + अ से २कग + अक − अ घटाओ ॥

(८) यर + य^{2} + र^{2} से यर − य^{2} + र^{2} ॥

(९) २यर + ३य^{2} + ४र^{2} से यर − २य^{2} − र^{2} ॥

(१०) २मन + ५म − २न से मन + म + न ॥

(११) −२यर + मय − पर से −३यर − २मय − पर ॥

(१२) ५अकग − २अक − ३अग से २अकग + अक − अग + २

(१३) अ^{2} − क^{2} − ग^{2} से अ^{2} − २क^{2} − २ग^{2}

(१४) ४अय − ३अ^{2} + २य^{2} से २अय − अ^{2} + ४य^{2} ॥

(१५) ३अ^{2}क + २अ^{2}ग − ५ग^{2} से अ^{2}क − अ^{2}ग − ७ग^{2}

(१६) २यर + ३अ − अ^{2}क + ५ से २अ − अ^{2}क + ६

(१७) $\frac{३}{२}$अय − $\frac{१}{२}$यर + $\frac{२}{३}$ से $\frac{१}{३}$अय + $\frac{३}{२}$यर − $\frac{१}{३}$

(१८) अ + क − ग से $\frac{१}{२}$अ − $\frac{१}{२}$क − $\frac{३}{२}$ग

॥ उदाहरण ॥

(२९) एक पद की राशि को दूसरे पद की राशि से गुणा करने की रीति ॥

प्रथम जो दोनों राशि धन हों जैसे २अ और ३क तो उनका घात ४ प्रक्रम के अनुसार २अ×३क के तुल्य है ॥

२ अ × ३ क = २ × अ × ३ × क और अ × ३ = ३ × अ (प्रक्रम ५)

इसलिये घात = २ × ३ × अ × क = ६ अ क क्योंकि २ × ३ = ६ ॥

दूसरे जो एक राशि ऋण हो जैसे २ अ को −३ क बार गुणा करो अथ −३ क को २ क बार गुणा करो इन दोनों अङ्कों का यही अर्थ है कि ३ क को २ अ बार घटाना है इसलिये ३ क को अ बार जोड़ें तो इस घात और पहिली घात में केवल चिन्ह का ही अन्तर होगा इसलिये घात −६ अक के तुल्य होगा ॥

तीसरे जो दोनों राशि ऋण हों जैसे −२ अ और −३ क को गुणा करो इसका यह अर्थ है −३ क को २ अ बार अर्थात् −६ अक घटाना है परन्तु (१९ प्रक्रम) −६ अक को जो घटावेंगे तो उस के चिन्ह को बदल देवेंगे जैसे +६ अक लिखेंगे और इस का यह अर्थ है कि ६ अक जोड़ना है ॥

ऊपर जो उदाहरण लिखे हैं उन सब को इकट्ठा करके लिखते हैं॥

+३ क को +२ अ से गुणा तो घात +६ अक हुआ ॥
−३ क को +२ अ से गुणा तो घात −६ अक हुआ ॥
+३ क को −२ अ से गुणा तो घात −६ अक हुआ ॥
−३ क को −२ अ से गुणा तो घात +६ अक हुआ ॥

रीति

जिन एक पद की राशियों का गुणा करना हो उनके अक्षरों को पास पास लिखो वेही घात के गुणक रूप अवयव होंगे फिर इनके गुणके अंकों को गुणाकर घात का गुण

जानो और जो दोनों पद के चिन्ह एक से हों तो घात का चिन्ह धन मानो और जो दोनों पद के चिन्ह एक से न हों तो घात का चिन्ह ऋण रक्खो ॥

॥उदाहरण ॥

२य × ५र = १०यर, −३ × ५अ = −१५अ, ७म × −न = −७मन, २अक × ३अग = ६$अ^{२}$कग, −७अयर × ४अकग = −२८$अ^{२}$कगयर, २अ × ३क × ४ग = ६अक × ४ग = ६ × ४ × अकग = २४अकग ॥

२२ प्र० जब कि दो वा अधिक पद की राशियों को एक पद की राशि से गुणा करना हो ॥

कल्पना करो अ + क + ग + आदि को म से गुणा करना है तो अ को म बार गुणा करना तो घात मअ के तुल्य हुआ क को म से गुणा किया तो मक हुआ ग को म से गुणा किया तो मग हुआ, आदि और इन घातों का योग मअ + मक + मग आदि इष्ट घात के तुल्य हुआ क्योंकि यह प्रत्यक्ष है कि जिन खंडों में संपूर्ण राशि बनी है उन को पृथक् २ म से गुणा कर घातों को जोड़ दिया उसका यही अर्थ है कि संपूर्ण राशि म से गुणी गई है और वह योग संपूर्ण घात के तुल्य है इससे यह रीति निकलती है कि (२१ प्रक्रम) के अनुसार गुण्य के प्रत्येक पद को पृथक् २ गुणक के पद से गुणा लो तो उन्हीं घातों का योग इष्ट घात के तुल्य होगा ॥

॥ उदाहरण ॥

(१) अ + क − ग को २ से गुणा तो घात = २अ + २क − २ग ॥

(२) अ − क + ग को − २ तथा = अ + क − २ग ॥

(३) अ − क + ग को घ तथा. = अघ − कघ + गघ − गघ

(४) अ − क + ग को − घ तथा. = − अघ + कघ − गघ ॥

(५) अय + कर को ग तथा = अगय + कगर ॥

(६) अय + कर − गल को २प तथा = २अपय + २कपर −२गपल ॥

(७) २अ + ३क − ४ग को २य तथा = ४अय + ६कय − ८गय

(८) अय + कर को − अय तथा = अ^{२}य^{२} + अकयर ॥

(९) अय + कर को − कर तथा = − अकयर − क^{२}र^{२} ॥

(१०) ७य − ४र + ६ को ३य तथा = २१य^{२} − १२यर + १८य ॥

(११) ६य^{२} − १३य + १ को ५ तथा = ३०य^{२} − ६५य + ५ ॥

(१२) य^{२} − पय + फ को पय तथा = पय^{२} − प^{२}य^{२} + पफय ॥

(१३) जिन दो राशियों को गुणा करना हो उन में जो प्रत्येक राशि में दो वा अधिक पद हों तो उनके गुणा करने की रीति लिखते हैं ॥

कल्पना करो कि अ + क को ग + घ से गुणा करना है तो इसका यह अर्थ है कि अ + क को ग + घ बार जोडना है अर्थात् अ + क को ग बार जोड़ना है और फिर उसे ही घ बार जोडना है (२२ प्रक्रम की रीति के अनुसार अ + क को ग से गुणा तो घात अग + कग हुआ। और ऐसे ही अ + क को घ से गुणा तो घात अघ + कघ हुआ इसलिये अ + क को ग और घ वा ग + घ से गुणा तो अग + कग + अघ + कघ इष्ट घात हुआ ॥

जो अ + क को ग − घ से गुणा करना हो तो इसका तुम यह अर्थ समझो कि अ − क को ग बार जोड़ना है

और उसेही घबार घटाना है॥

अ + क को ग से गुणा तो अग + कग घात हुआ और अ + क को घ से गुणा तो अघ + कघ घात हुआ इसे अगले घात में से १९ अङ्क के अनुसार घटाया तो अग + कग - अघ - कघ यही इष्ट घात हुआ॥

जो अ - क को ग - घ से गुणा करना हो तो तुम इसका यह अर्थ समझो कि अ - क को गबार गुणा करना है और उस में से अ + क को घ बार घटाना है इसलिये अग + कग में से अघ - कघ घटाया तो अग - कग - अघ + कघ इष्ट घात हुआ॥

॥ ऊपर जो उदाहरण लिखे हैं उन्हें॥
इकट्ठा करके लिखते हैं

अ + क को ग + घ से गुणा तो घात = अग + कग + अघ + कघ॥

अ + क को ग - घ से तथा = अग + कग - अघ - कघ॥

अ - क को ग - घ से तथा = अग - कग - अघ + कघ॥

॥ ऐसे ही और उदाहरणों से भी यह रीति निकल ती है॥

॥ रीति ॥

गुण्य के हर एक पद को गुणक के हर एक पद से गुणा करो इन ही घातों का योग संपूर्ण घात के तुल्य होगा॥

॥ उदाहरण ॥

(१) घ + र को
 घ + र से गुणा करो॥

$य^{2}+य$ यह घात गुण्य को य से गुणा तो हुआ ॥
$+२य+२$ यह घात गुण्य को २ से गुणा तो हुआ ॥

$य^{2}+३य+२$ संपूर्ण घात हुआ

(२) २१ वा २०+१ को
१९ वा २०−१ से गुणा करो ॥

१८९, ४००+२०
२१, −२०−१

---

३९९ वा ४००−१

(३) २+अ को
३−क से गुणा करो ।

६+३अ यह घात गुण्य को ३ से गुणा तो हुआ ॥
−२क−अक यह घात गुण्य को −क से गुणा तो हुआ

६+३अ−२क−अक संपूर्ण घात हुआ

(४) अ+क को
अ+क से गुणा करो

$अ^{2}+अक$ यह घात गुण्य को अ से गुणा तो हुआ ॥
$+अक+क^{2}$ यह घात गुण्य को क से गुणा तो हुआ ॥

$अ^{2}+२अक+क^{2}$ संपूर्ण घात

(५) अ−क को
अ−क से

$अ^{2}-अक$ यह घात गुण्य को अ से गुणा तो हुआ ॥

−अक+क^{2} यह घात गुण्य को −क से गुणा तो हुआ

अ^{2}−२अक+क^{2} संपूर्ण घात हुआ

(६) य−२र को

२य+३र से गुणा करो

२य^{2}−४यर यह घात गुण्य को २य से गुणा तो हुआ

+३यर−६र^{2} यह घात गुण्य को ३र से गुणा तो हुआ

२य^{2}−यर−६र^{2} संपूर्ण घात हुआ

अब एक ऐसा उदाहरण लिखते हैं जिस के गुण्य और गुणक दोनों में दो दो पद से अधिक पद हैं ।।

२अ+३क−४ग को

अ+क−ग से गुणा करो ।।

२अ^{2}+३अक−४अग यह घात गुण्य को अ से गुणा तो हुआ

+२अक+३क^{2}−४कग तथा +क से

−२अग−३कग+४ग^{2} तथा −ग से

२अ^{2}+५अक−६अग+३क^{2}−७कग+४ग^{2} संपूर्ण घात हुआ ।।

।।२४।। प्रक्रम के अनुसार एक राशि के घातों के गुणा करने की रीति ।।

एक ही राशि के जिन भिन्न घातों को गुणा करना हो उन के घात प्रकाशक का योग करो वही योग इष्ट घात का घात

प्रकाशक होगा॥

जैसे अ^{2} × अ^{3} = अ^{5} क्योंकि प्रक्रम ६ के अनुसार अ^{2} = अअ और अ^{3} = अ × अ × अ इसलिये अ^{2} × अ^{3} = अअ × अअअ = अअअअअ = अ^{5} इसी रीति से यह भी जानो कि अ^{6} × अ^{10} = अ^{16} और ऐसे ही जो और घात प्रकाशक अंक हों तो घातों का गुणा करने में योग होता है॥

जैसे अ^{म} × अ^{न} = अ$^{म+न}$ इस उदाहरण में म और न के स्थान में चाहो सो अंक रख दो॥

॥६ प्रक्रम की परिभाषा के अनुसार॥

अ^{म} = अ-अ-अ आदि अ से अ को गुणा करते चले जाओ जब तक गुणक रूप अवयवों का परिमाण म हो और ऐसे ही

अ^{न} = अ-अ-अ आदि अ से अ को गुणा करते चले जाओ जब तक गुणक रूप अवयवों का परिमाण न हो॥

∴ अ^{म} × अ^{न} = अ-अ-अ आदि म गुणक रूप अवयवों तक गुणा करो॥

× अ-अ-अ आदि न गुणक रूप अवयवों तक गुणा करो

= अ-अ-अ आदि जब तक गुणक रूप अवयवों का परिमाण म + न हो॥

= अ$^{म+न}$ परिभाषा के अनुसार

अनुमान जो अ के स्थान में अ + क वा अ + क + ग वा और कोई राशि लिखें तो उस के भिन्न घातों को गुणा करें तो भी उन के घात प्रकाशक का योग करलेंगे॥

जैसे अक्षर के दूसरे घात को उसी राशि के तीसरे घात से गुणा करैं तो दूसरा घात उसी राशि के पाँचवें घात के तुल्य होगा ॥

॥उदाहरण॥

(१) $२य^{२} \times ३य^{३} = २ \times ३ \times य^{२} य^{३} = ६य^{५}$ ॥

(२) $७अय \times २अयर = ७ \times २ अ अ य य र = १४अ^{२}य^{२}र$

(३) $५अ^{६}कग \times अकग = ५अ^{६} अ क क ग ग = ५अ^{७}क^{२}ग^{२}$ ॥

(४) $३य^{२}र^{२}ल^{२} \times ४य^{३}र^{२}ल^{२} = ३ \times ४ य^{२} य^{३} र^{२} र^{२} ल^{२} ल^{२} = १२य^{५}र^{४}ल^{४}$ ॥

(५) $मनय^{३}र \times -पय^{२}र = -मन प य^{३} य^{२} र र = -मनपय^{५}र^{२}$ ॥

(६) $-४अक^{२}गय \times -२अगयर^{२} = ८ अ अ क^{२} ग ग य य र^{२} = ८अ^{२}क^{२}ग^{२}य^{२}र^{२}$ ॥

(७) $२अ^{म} \times ३अ^{३} = २ \times ३ \times अ^{म} अ^{३} = ६अ^{म+३}$ ॥

(८) $अय^{म} \times कय^{न} = अकय^{म} य^{न} = अकय^{म+न}$ ॥

(९) $अय^{म} \times कय^{न} \times गय^{प} = अकग य^{म} य^{न} य^{प} = अकगय^{म+न+प}$ ॥

(१०) $२अय \times -३कर \times -अयर = २ \times -३ \times -१ \times अ^{२} क य^{२} र^{२} = ६अ^{२}कय^{२}र^{२}$ ॥

॥उदाहरण॥

(१) अयर को क से गुणा करो ॥

(२) ३मन को −प से गुणा करो ॥

(३) ३म+न−प को ३ से गुणा करो ॥

(४) $अय + कय^{२}$ को प से गुणा करो ॥

(५) अय + २कय को २अ से गुणा करो ॥

(६) $४अ^{२} - २अयर$ को अय से गुणा करो ॥

(७) ३प − २यर + ६ को −यर से गुणा करो ॥

(८) $१ - २अप + ३कय^{२}$ को ३न से गुणा करो ॥

(९) २अक − ३अग + ५कघ को −२य से गुणा करो॥

(१०) २यर − ३ को ७य से गुणा करो॥

(११) अय + कर − गल को २यरल से गुणा करो॥

(१२) $२अ^{२}$ − कय + घ को कर से गुणा करो॥

(१३) अ + य को क + र से गुणा करो॥

(१४) ६य + ४ को य − २ से गुणा करो॥

(१५) य − ४ को य + ३ से गुणा करो॥

(१६) २य − ५ को ३य − २ से गुणा करो॥

(१७) १ − य को य + १ से गुणा करो॥

(१८) १ − य को १ − २य से गुणा करो॥

(१९) अय + कर को २य − र से गुणा करो॥

(२०) अ + २य को अ − ३य से गुणा करो॥

(२१) ७य − २ को ५य − ४ से गुणा करो॥

(२२) २अय − ३कर को ४र − ३य से गुणा करो॥

(२३) १ − २मन को २म + न से गुणा करो॥

(२४) $अ^{२}$ − कग को अग − $क^{२}$ से गुणा करो॥

(२५) १ + २य + ३र को य − र से गुणा करो॥

(२६) अ + य − र को क − र से गुणा करो॥

(२७) अग − कग + अघ को २अ − क से गुणा करो॥

(२८) $अ^{२}$ + $अ^{३}$ + अ + १ को अ − १ से गुणा करो॥

(२९)
$य^{३}$ + $अ^{२}य$ + $अय^{२}$ + $अ^{३}$ को य − अ से गुणा करो॥

(३०) $४य^{२}$ − ६य + ९ को २य + ३ से गुणा करो॥

(३१) ४ + २य + $य^{२}$ को ४ − २य + $य^{२}$ से गुणा करो॥

(३२) $अ^{३}$ − $२य^{२}$ को $अ^{३}$ − $य^{२}$ से गुणा करो॥

(३३) $य^३ + ३य^२ + ९य + २७$ को $य - ३$ से गुणा करो ॥
(३४) $२अ^४य^२ + ३क^२र$ को $२अ^४य^२ - ३क^२र$ से गुणाकरो
(३५) $२अ^२ - ३अक + क^२$ को $२अ^२ + ३अक - क^२$ से गुणा करो ॥

॥ भाग देना ॥

भाज्य भाजक और लब्धि इन शब्दों का जो अर्थ अंक गणित में है वही अर्थ उन का बीजगणित में भी है एक राशि में दूसरी राशि का भाग देने से यह अर्थ समझो कि पहिली राशि में दूसरी राशि के बार जा सकती है और जो लब्धि को भाजक से गुणा करो तो घात भाज्य के तुल्य होगा ॥

॥ (३५) ॥ एक पद में एक पद के भाग देने की रीति ॥

क्योंकि लब्धि × भाजक = भाज्य इसलिये जो भाज्य के दो ऐसे गुणक रूप अवयव करले कि एक गुणक रूप अवयव भाजक के समान हो तो दूसरा गुणक रूप अवयव लब्धि के तुल्य होगा ॥

जैसे २य में य का भाग दे तो क्योंकि २य में य का २ गुण है इसलिये २ लब्धि होगी और जो ३य में ३ का भाग देना हो तो क्योंकि ३य में ३ का य गुण है इसलिये य लब्धि हुई ॥

इस्से यह बात निकलती है कि जो एक पद में दूसरे पद का निश्शेष भाग लग जाय तो भाग देने की यह रीति है कि भाज्य के दो ऐसे गुणक रूप अवयव कर लो जिन में एक गुणक रूप अवयव भाजक हो तो दूसरा गुणक रूप अवयव लब्धि होगा ॥

॥ उदाहरण ॥

(१) ६ अकग में २ अक का भाग दो ॥

६ अकग = २ अक × ३ ग इसकारण ३ ग लब्धि हुई

(२) १० यर में २ र का भाग दो ॥

१० यर = २ र × ५ य इसलिये ५ य लब्धि हुई ॥

(३) − ७ अयर में ७ अय का भाग दो ॥

−७ अयर = ७ अय × − र इसलिये − र लब्धि हुई ॥

(४) ६ मनयर में − मयर का भाग दो ॥

६ मनयर = − मयर × − ६न इसलिये − ६न लब्धि हुई ॥

(५) − १४ अ^{२} कग में − २ अक का भाग दो ॥

− १४ अ^{२} कग = − २ अक × ७ अग इसलिये ७ अग लब्धि हुई ॥

(६) − ८ अ^{२} क^{३} ग^{४} में ४ अकग का भाग दो ॥

− ८ अ^{२} क^{३} ग^{४} = ४ अकग × − २ अक^{२} ग^{३} इसलिये − २ अक^{२} ग^{३} लब्धि हुई ॥

(७) ५ अ^{५} क^{२} ग^{५} में अ^{२} क ग^{२} का भाग दो ॥

५ अ^{५} क^{२} ग^{५} = अ^{२} क ग^{२} × ५ अ^{३} क ग^{३} इसलिये ५ अ^{३} क ग^{३} लब्धि हुई ॥

(८) २१ मन^{३} य में $\frac{७}{८}$ मनय का भाग दो ॥

२१ मन^{३} य = $\frac{७}{८}$ मनय × २४ न^{२} इसलिये २४ न^{२} लब्धि हुई ॥

॥ (२६) जब कि एक राशि में दो वा अधिक पद हों उसमें एक ॥ पद के भाग देने की रीति ॥

क्योंकि २२ क्रम के अनुसार अ + क + ग + आदि को म से गुणा तो मअ + मक + मग + आदि यह घात हुआ इसलिये मअ +

मक + मग + आदि में म का भाग दिया तो क + ग + आदि लब्धि हुई इस्से यह रीति निकलती है ॥

॥ रीति ॥

भाज्य के हर एक पद में भाजक का २५ प्रक्रम के अनुसार भाग दो तो इन सब लब्धियों का योग संपूर्ण लब्धि के तुल्य होगा ॥

॥ उदाहरण ॥

(१) अक + २अग − ३अघ में अ का भाग दो ॥

अक ÷ अ = क, + २अग ÷ अ = + २ग, − ३अघ ÷ अ = − ३घ इसलिये संपूर्ण राशि में अ का भाग देने से क + २ग − ३घ संपूर्ण लब्धि हुई ॥

(२) मय + नय^२ − पयर में य का भाग दो ॥

मय ÷ य = म, + नय^२ ÷ य = + नय − पयर ÷ य, = − पर इसलिये संपूर्ण राशि में य का भाग देने से म + नय − पर यह संपूर्ण लब्धि हुई ॥

(३) ४अ^{३}य^२ − ६अ^{२}कय + २अय^३ में २अय का भाग दो ॥

४अ^{३}य ÷ २अय = २अ^{२}य − ६अ^{२}कय ÷ अय = − ३अक + २अय^३ ÷ २अय = + य^२ इसलिये २अ^{२}य − ३अक + य^२ यह संपूर्ण लब्धि हुई ॥

॥ (२७) जब भाजक में दो वा अधिक पद हों तो भाग देने की रीति लिखते हैं ॥

॥ रीति ॥

प्रथम भाज्य और भाजक दोनों के पदों को इस क्रम से लिखो कि किसी अक्षर के प्रत्येक घात में जो सब से बड़ा घात पहिले पद में लिखा जाय उस से छोटा घात दूसरे पद

में लिखो और ऐसे ही और जो घात हों उन्हें स्थापन करो वा जो सब से छोटा घात पद में लिखा जाय तो उसे बड़े घात को दूसरे पद में लिखो और इसी क्रम से सब घातों को स्थापन करो

दूसरे २५ क्रम के अनुसार देखो कि भाज्य के पहिले पद में भाजक का पहिला पद के बार जा सकता है और इसे लब्धि के स्थान में रक्खो ॥

तीसरे इस लब्धि से संपूर्ण भाजक को गुणाकर घात को भाज्य में से घटाओ ॥

चौथे और शेष को नया भाज्य मान ऊपर की क्रिया करो और जो लब्धि मिले उसे पूर्व लब्धि के दाहिनी ओर रक्खो और यह क्रिया वहां तक करो जब कि शेष ० रहजाय वा भाज्य भाजक से कम तो सब लब्धियों का योग संपूर्ण लब्धि होगी ॥

ऊपर जो भाग देने की रीति लिखी है वह अंक गणित के भाग देने की रीति से मिलती है ॥

जैसे जो तीन हजार चौरासी में, बत्तीस का भाग देना होता है तो हम भाज्य और भाजक को १० के घातों के अनुसार क्रम से लिखते हैं ॥

जैसे भाजक ३२ को लिखते हैं और इसका यह अर्थ है ३×१०+२ और ऐसेही भाज्य ३८४ का अर्थ है ३×१०² + ८×१०+४ तो भाग देने से हम यह देखते हैं कि भाजक का पहिला पद वा ३×१० वा ३० भाज्य के पहिले पद का ३×१०² वा ३०० में १० बार जासकता है इसलिये १० लब्धि का एक भाग हुआ फिर १० गुणा ३२ वा ३२० को ३८४ में से घटाया तो शेष ६४ रहा इसे नया भाज्य मान इस में ३२ का भाग

दिया तो २ पूरी लब्धि मिली इसे पूर्व लब्धि १० में जोड़ा तो १०+२ वा १२ संपूर्ण लब्धि मिली ॥

॥ उदाहरण ॥

(४) अग + कग + अघ + कघ में अ + क का भाग दो इस उदाहरण में अ अक्षर के क्रम से भाज्य और भाजक के पदों को लिखा ॥

भाजक भाज्य लब्धि

अ+क) अग + कग + अघ + कघ (ग + घ

अग + कग

+ अघ + कघ

+ अघ + कघ

०

∴ ग + घ लब्धि हुई ॥

ऊपर जो उदाहरण लिखा है उस में पहिले तो हम यह देखते हैं कि अग में अ, ग बार जा सकता है इस लिये हमने ग, को लब्धि का अंश मान उसे भाज्य के दाहिनी ओर रक्खा फिर अ + क भाजक को ग, से गुणाकर अग + कग घात को भाज्य में से घटाया तो + अघ + कघ शेष रहा इस शेष को नया भाज्य मान इस में अ का भाग दिया तो + घ लब्धि का दूसरा अंश मिला, इसे पूर्व लब्धि ग के दाहिनी ओर रक्खा तो ग + घ संपूर्ण लब्धि हुई और भाग देने के पीछे शेष कुछ न रहा

(५) उ० $अ^२ + क^२ - २अक$ में अ – क का भाग दो ॥

भाज्य और भाजक के पदों को अ के घातों के अनुसार रक्खा तो अ − क भाजक और अ^2 − २अ क + क^2 भाज्य हुआ

अ − क) अ^2 − २अ क + क^2 (अ − क लब्धि हुई॥
अ^2 − अ क
————
− अ क + क^2
− अ क + क^2
————
०

हम देखते हैं कि अ^2 में अ, अ बार जा सकता है यह लब्धि का पहिला पद हुआ फिर अ − क भाजक को अ से गुणा तो अ^2 − अ क घात हुआ इसे भाज्य में से घटाया तो − अक + क^2 शेष रहा इसके − अ क पद में अ का भाग दिया तो − क लब्धि का दूसरा पद मिला फिर अ − क भाजक को − क से गुणा कर घात − अक + क^2 को पूर्व शेष में से घटाया तो शेष ० रही, इस लिये अ − क संपूर्ण लब्धि हुई

३ उ० २अ^2 + ३क^2 + ४ग^2 + ५अक − ६अग − ७कग में अ + क − ग का भाग दो॥

पदों को अ के घातों के अनुसार स्थापन किया॥

अ + क − ग) २अ^2 + ५अक + ६अग + ३क^2 − ७कग + ४ग^2 (२अ + ३क − ४ग
२अ^2 + २अक − २अग
————
+ ३अक − ४अग + ३क^2 − ७कग + ४ग^2
+ ३अक + ३क^2 − ३कग
————

$-४खग - ४कग + ४ग^2$

$-४खग - ४कग + ४ग^2$

०

∴ $२ख + २क - ४ग$ संपूर्ण लब्धि हुई ॥

४ उ० $६४ - ख^6$ में $२ - ख$ का भाग दो

$$२-ख)\ ६४ - ख^6\ (\ ३२ + १६ख + ८ख^2 + ४ख^3 + २ख^4 + ख^5$$

$$६४ - ३२ख$$

$$३२ख - ख^6$$

$$३२ख - १६ख^2$$

$$१६ख^2 - ख^6$$

$$१६ख^2 - ८ख^3$$

$$८ख^3 - ख^6$$

$$८ख^3 - ४ख^4$$

$$४ख^4 - ख^6$$

$$४ख^4 - २ख^5$$

$$२ख^5 - ख^6$$

$$२ख^5 - ख^6$$

$$०$$

इसलिये $३२ + १६ख + ८ख^2 + ४ख^3 + २ख^4 + ख^5$ लब्धि हुई ॥

॥६ अभ्यास के लिये उदाहरण ॥

(१) ७य में ७ का भाग दो ॥

(२) ७य में य का भाग दो ॥

(३) ७अय में अ का भाग दो ॥

(४) ७अय में ७य का भाग दो ॥

(५) ३अकय में अक का भाग दो ॥

(६) ३अकग में ३कग का भाग दो ॥

(७) −अयर में य का भाग दो ॥

(८) अयर में −य का भाग दो ॥

(९) $६अ^2मन$ में $-२मनअ$ का भाग दो ॥

(१०) $१४अ^3य^2र$ में $७अ^2र$ का भाग दो ॥

(११) $-७मन^2पय$ में $\frac{२}{३}$ मनप का भाग दो ॥

(१२) $-\frac{२}{३}अकय^2र$ में $-\frac{१}{३}अयर$ का भाग दो ॥

(१३) ३अग−२अकघ में २अ का भाग दो ॥

(१४) ४अग−२अकघ में २अ का भाग दो ॥

(१५) $८य^2-६यर$ में $-२य$ का भाग दो ॥

(१६) $३कग+२४अकग^2$ $६क^2ग^2$ में $-३कग$ का भाग दो ॥

(१७) $४अ^2य^2-८अकय-२अय$ में $-२अय$ का भाग दो ॥

(१८) $अ^3य^2-५अकय^3+६अय^4$ में $अय^2$ का भाग दो ॥

(१९) $य^2+३य+२$ में $य+२$ का भाग दो ॥

(२०) अग−कग+अघ−कघ में अ−क का भाग दो ॥

(२१) ६+३अ−२क−अक में २+अ का भाग दो ॥

(२२) $४अ^2-१५य^2-४अय$ में $२अ+३य$ का भाग दो ॥

(२३) $२अ^2+अ-६$ में $२अ-३$ का भाग दो ॥

(२४) २अक+६अकग−८अकगघ में १+३ग−४गघ का भाग दो ॥

(२५) $३य^2+१६य-३५$ में $य+७$ का भाग दो ॥

(२६) $३य^4+१४य^3+९य+२$ में $य^2+५य+१$ का भाग दो ॥

(२७) $अक+२अ^2-३क^2-४कग-अग-ग^2$ में $२अ+३क+ग$ का भाग दो ॥

(२८) १५ अ^{४} + १० अ^{३}य + ४अ^{२}य^{२} + ६ अय^{३} − ३य^{४} में ३अ^{२} − य^{२} + २अय का भाग दो ॥

(२९) ब प^{३} + ३ प^{२}ब^{२} − २पब^{३} − २ब^{४} में प^{२} − ब^{२} का भाग दो ॥

(३०) अ^{२}य^{३} + अ^{५} − २अकय^{३} + क^{२}य^{२} + अ^{३}क^{२} − २अ^{४}क में अय − कय + अ^{२} − अक का भाग दो ॥

(३१) ३२ य^{५} + २४३ में २ य + ३ का भाग दो ॥

॥ सम महत्तमापवर्तक ॥

२८ प्र० परिभाषा जिस एक राशि में दूसरी राशि का निःशेष भाग लग जाय तो पहिली राशि को अपवर्त्य कहते हैं और दूसरी को अपवर्तक इसलिये जो दो वा अधिक राशियों में एक राशि का निःशेष भाग लग जाय तो उन राशियों को समापवर्तक कहते हैं क्योंकि वह सब राशियों का अपवर्तक है और इस कारण सबसे बड़े सम भाजक को सम महत्तमापवर्तक कहते हैं ॥

अपवर्तक केवल भाजक का दूसरा नाम है और अपवर्तक उस भाजक को कहते हैं जिसका भाज्य में निःशेष भाग लग जाय और ऐसा ही अपवर्त्य भाज्य का दूसरा नाम है और अपवर्त्य ऐसे भाज्य को कहते हैं जिसमें भाजक का निःशेष भाग लग जाय ॥

जैसे १५ का ५ अपवर्तक है क्योंकि १५ में ५ का निःशेष भाग लग सका है और इसी कारण २५ का भी ५ अपवर्तक है इसलिये १५ और २५ का ५ समापवर्तक हुआ ऐसे ही ८ और १२ का २ समापवर्तक है और उन का ४ भी समापवर्तक है और २ से ४ बड़ा है और ८ और १२ का २ और ४ के सिवाय और कोई अंक अपवर्तक नहीं है इस कारण ८ और १२ का ४

सम महत्तमापवर्त्तक हुआ ॥

क्योंकि २ अ में अ, का निःशेष भाग लग सक्ता है और ३ अ, में भी अ, का निःशेष भाग लग सक्ता है इस कारण २ अ औ र ३ अ का अ समापवर्त्तक हुआ और २ अ और ३ अ का और कोई अपवर्त्तक नहीं है इसलिये उनका अ सम महत्तमाप वर्त्तक हुआ ॥

ऊपर जो उदाहरण लिखे हैं उनसे यह स्पष्ट जान पड़ता है कि एक राशि का अपवर्त्तक उसका एक गुणकरूप अवय व होता है इसलिये जो एक राशि के संपूर्ण गुणक रूप अव यव निकाल लिये जांय तो वे सब उस राशि के अपव- र्त्तक होंगे और ऐसे ही जो दूसरी राशि के भी अवयव का निकाल लिये जांय तो दोनों राशियों में जो समापवर्त्तक हैं वे एक बार देखने से ही मालूम हो जांयगे और उनका घात दोनों राशियों का सम महत्तमापवर्त्तक होगा ॥

२९ प्र० ऐसे ही जो एक संख्या के गुणक रूप अवयव निकालने हो ते हैं तो हम उस में २, ३, ४, ५, ६, आदि अंकों का भाग लगाते हैं और जिस अंक का निःशेष भाग लगता है उस का भाग देके लब्धि में फिर जो किसी अंक का निःशेष भाग ल गता है तो भाग देके लब्धि ले लेते हैं और इस लब्धि में भी यही किया यहां तक करते हैं कि पिछली लब्धि में १ के सिवाय किसी और अंक का निःशेष भाग न लगे ॥

जैसे १०८ के गुणक रूप अवयव निकालो तो हम देखते हैं कि १०८ में २ का तो निःशेष भाग लग ही नहीं सकता परन्तु ३ का निःशेष भाग लग जाता है ॥

ऐसे ही २२४ के गुणक रूप अवयव निकालो

२	२	२	४
२	१	१	२
२		५	६
२		२	८
२		१	४
७			७
			१

∴ २२४ = २×२×२×२×२×७

पहिले उदाहरण में १८९ में २ का तो निःशेष भाग लगा ही नहीं पर उस में ३ का ३ बार निश्शेष भाग लगा और ४, ५, ६, इन में से किसी अंक का पिछली लब्धि में निःशेष भाग नहीं लगा तिस पीछे देखा तो ७ का निःशेष भाग लग गया ॥

दूसरे उदाहरण में २२४ में २ का ५ बार निश्शेष भाग लगा और फिर ७ का निःश्शेष भाग लग गया ॥

इसलिये १८९ के ३, ३, ३, और ७ गुणक रूप अवयव हैं और २२४ के २ २ २ २ २ और ७ गुणकरूप अवयव हैं इस कारण ७ दोनों संख्या का समापवर्त्तक है और वही ७, १८९ और २२४ का सम महत्तमा पवर्त्तक है ॥

३८५ और ३९६ का सम महत्तमापवर्त्तक निकालो ॥

५	३	८	५
७		७	७
११		१	१
			१

∴ ३८५ = ५ × ७ × ११

२	३	९	६
२	१	९	८
३		९	९
३		३	३
११		१	१
			१

∴ ३९६ = २ × २ × ३ × ३ × ११

और क्योंकि ३८५ और ३९६ के गुणक रूप अवयवों में ११ सम गुणक रूप अवयव बड़ा है इस कारण उन संख्याओं का ११ सम महत्तमापवर्त्तक हुआ ॥

अंक गणित में दो वा अधिक संख्याओं के अपवर्त्तांक दा सम महत्तमापवर्त्तक निकालने की जो रीति लिखी है उसी रीति से बीज गणित में भी दो वा अधिक राशियों का सम महत्तमापवर्त्तक निकाल सक्ता है॥

१० पृ० अभ्यास करने से बीजात्मक राशियों के गुणक रूप अवयव सहज में निकल आते हैं और जो एक पद की राशि हो तो उसके गुणक रूप अवयव सहज में निकल सते हैं॥

जैसे २अ^{2}कग^{2} = २अअकगग, ४अ^{2}क^{2}ग = २×२अअककग इस कारण २अ^{2}कग और ४अ^{2}क^{2}ग इनका सम महत्तमापवर्त्तक उनके २, अ, अ, क, ग, सब गुणक रूप अवयवों के घात २अ^{2}कग के तुल्य है॥

३अ^{4}य^{5}र और ६अ^{2}कय इनका सम महत्तमापवर्त्तक निकालो॥

३अ^{4}य^{5}र = ३अअअअयययययर और।

६अ^{2}कय = २×३×अअकय, इनमें ३, अ, अ, य सम गुणक रूप अवयव हैं इसलिये ३×अअय वा ३अ^{2}य यही सम महत्तमापवर्त्तक हुआ॥

॥लघुतम समापवर्त्य॥

११ पृ० परिभाषा जो एक राशि में दूसरी राशि का निःशेष भाग लग जाय तो पहिली राशि को अपवर्त्य कहते हैं इस कारण जो एक राशि में दो वा अधिक राशियों का पृथक २ निःशेष भाग लग जाय तो पूर्व राशि को उन राशियों का समापवर्त्य कहते हैं और ऐसे ही जो किसी और सब से छोटी राशि में उन राशियों का निश्शेष भाग लग जाय तो छोटी राशि को लघुतम समापवर्त्य॥

जैसे ५ का १५ अपवर्त्य है क्योंकि १५ में ५ का ३ बार ठीक भाग लगजाता है और ३ का भी १५ अपवर्त्य है क्योंकि उस में ३ का ५ बार ठीक भाग लगजाता है इसलिये ५ और ३ का १५ समापवर्त्य है ऐसे ही ५ और ३ के ३० और ४५ भी समापवर्त्य हैं परंतु उन सब अपवर्त्यों में १५ सब से छोटा है इसलिये ५ और ३ का १५ लघुतम समापवर्त्य हुआ

२ अ क, अ का अपवर्त्य है क्योंकि २ अ क में अ २ क बार जासकता है और २ अ क, क का भी अपवर्त्य है क्योंकि २ अ क में क, २ अ बार जा सकता है इसलिये अ और क का २ अ क समापवर्त्य है परंतु इस को अ और क का लघुतम समापवर्त्य इसलिये नहीं कहते कि अ और क का अक भी सम लघुतमापवर्त्य है और यह २ अ क से छोटा है इस कारण अ और क का अ क लघुतम समापवर्त्य है॥

ऊपर जो उदाहरण लिखे हैं उन से यह स्पष्ट जान पड़ता है कि जब एक राशि दूसरी राशि का अपवर्त्य हो तो दूसरी राशि अपवर्त्य का एक गुणक रूप अवयव होगी और जो दो वा अधिक राशियों की एक राशि अपवर्त्य हो तो हर एक राशि अपवर्त्य का गुणक रूप अवयव होगी इस से यह बात निकलती है कि इष्ट राशियों का घात उन का समापवर्त्य होगा परंतु यह उन राशियों का सम लघुतमापवर्त्य हो वा न हो॥

जैसे २, ४, ६, का २×४×६ वा ४८ घात समापवर्त्य है परंतु २, ४, और ६ का लघुतम समापवर्त्य १२ है॥

३२ प्र० इसलिये जो दो वा अधिक राशियों का लघुतम समापवर्त्य ढूंढना हो तो हर एक राशि के गुणक रूप अवयव

निकालकर एक ऐसी राशि बनाओ कि जिसमें प्रत्येक राशि के भिन्न गुणक रूप अवयव सब आ जांय और किसी राशि में कोई गुणक रूप अवयव दो वा अधिक बार आया हो तो उसे जो राशि बनाओ उसमें उतने ही बार रक्खो तो इस रीति से जो राशि बनेगी वह सब राशियों का लघुतम समापवर्त्य होगी॥

जैसे ३, १० और ६ इनका लघुतम समापवर्त्य निकालो ३=३×१, १०=२×५, ६=२×३

इसलिये ३, १, २, ५ भिन्न गुणक रूप अवयव हैं और किसी संख्या में एक गुणक रूप अवयव दो वा अधिक बार नहीं आया इसकारण ३×१×२×५=३० यह लघुतम समापवर्त्य हुआ॥

२ उ० ८, १६, १० और २० इनका लघुतम समापवर्त्य निकालो॥

८=२×२×२, १६=२×२×२×२, १०=२×५ और २०=२×२×५ इनमें २ और ५ भिन्नगुणकरूप अवयव हैं परन्तु एक संख्या में २, ४ बार आया है इसकारण २×२×२×२×५=८० यही लघुतम समापवर्त्य हुआ॥

३ उ० २अ, ६अक और ८अक इनका लघुतम समापवर्त्य निकालो॥

२अ=२×अ, ६अक=२×३×अक, ८अक=२×२×२ अक इनमें २, ३ अ और क ये भिन्न गुणक रूप अवयव हैं॥

और एक राशि में २, ३ बार आया है इसकारण २×२

×२×३×अपक = २४अक यह लघुतम समापवर्त्य हुआ ॥

४ उ० $८अ^2$, $१२अ^3$ और $२०अ^4$ इनका लघुतम समापवर्त्य निकालो ॥

$८अ^2$ = २×२×२ × अअ $१२अ^3$ = २×२×३ अअअ

$२०अ^4$ = २×२×५ अअअअ इन में २, ३, ५ और अ भिन्न गुणक रूप अवयव हैं और २, ३, बार एक राशि में आया है और अ ४ बार इस कारण २×२×२×३×५ अअअअ = $१२०अ^4$ यह लघुतम समापवर्त्य हुआ ॥

७ ॥ अभ्यास के लिये उदाहरण ॥

(१) १२८ और ८४ का सममहत्तमापवर्त्तक निकालो ॥

(२) २२५ और ६०० का

(३) ८०, १०० और १४० का

(४) अप और कप का

(५) $कथ^2$ और $क^2प^3$ इनका

(६) $अपय^2$ और $अ^2पप$ इनका

(७) $५अ^2कप$ और २० अपकयर का

(८) $१५अ^6क^2$ और $२१अ^2क^6$ का

(९) $९अ^4क^2ग^6$ और $२७अ^5क^3ग^6$ का

(१०) $१४म^2नप^3$ और ७ मनप इन का

(११) अकयर और २ अगयर का

(१२) $\frac{४}{५}अ^2$ और $\frac{२}{५}$ अक इनका ॥

(१३) अकघ और अगघ और कगघ का ॥

(१४) पयर, $य^2र^2$ और अपय का ॥

(१५) २१ और २४ का लघुतम समापवर्त्य निकालो ॥

(१६) १२, १६ और २० का ॥

(१७) ४, ७, ८ और २८ का॥

(१८) ४, ७, १४, २१ और २८ का॥

(१९) १, २, ३, ४, ५, ६, ७, ८ और ९ का

(२०) २१, २२, २३, और २४ का॥

(२१) अ यं और क य इन का॥

(२२) अ य और २ य र का॥

(२३) २ य, ६ य और ८ य का॥

(२४) अ क अ ग और क ग का॥

(२५) $य^2$, $र^2$ और २ य र इन का॥

(२६) क य, $ग^2$ य, ग य और क ग का॥

॥ भिन्न ॥

भिन्न शब्द का जो अर्थ अंक गणित में है वही बीज गणित में भी है जैसे $\frac{अ}{क}$ इस का यह अर्थ है कि एक बार संपूर्ण राशि के क तुल्य खण्ड हुए हैं और उन में से अ के समान खंड लिये गये हैं अ अंश है और क हर, अ और क राशियों के स्थान में चाहो जो संख्या मान लो॥

३२ प्र० अब इस बात को दिखाते हैं कि $\frac{अ}{क}$ अ के कवें भाग की तुल्य है भिन्न की परिभाषा के अनुसार $\frac{अ}{क}$ इस का यह अर्थ है कि १ के क तुल्य खंड किये गये हैं और उन में से अ खण्ड लिये हैं जब कि १ के ऐसे खंड भये हैं तो यह स्पष्ट दिखाई देता है कि प्रत्येक खण्ड १ का कवां भाग है और $\frac{अ}{क}$ से यह अर्थ है कि वैसे अ भाग लिये हैं अर्थात १ के कवां भाग को अ बार लिया है वा १ के कवां भाग को १+१+१ आदि अ तक लिया है और १+१+१+ आदि अ के तुल्य है इस लिये $\frac{अ}{क}$ अ के कवें भाग के तुल्य है॥

३४ प्र० जो किसी भिन्न के अंश और हर दोनों एक राशि से गुणे जाय तो भिन्न के मोल वा मान में कुछ अन्तर नहीं पड़ता ॥

जैसे $\frac{अ}{क} = \frac{२अ}{२क} = \frac{३अ}{३क} = \frac{नअ}{नक}$ क्योंकि $\frac{२अ}{२क}$ इसका यह अर्थ है कि १ के २क तुल्य खंड हुए हैं और उन में से २अ भाग लिये हैं जो एक के २क तुल्य खंड किये जांय और १ ही के क तुल्य खण्ड भी किये जांय तो पहिला प्रत्येक खण्ड दूसरे प्रत्येक खण्ड से दूना होगा इस लिये पहिले प्रकार के जो खण्ड २अ लिये जावें और दूसरे प्रकार के अ खंड लिये जावें तो इन खण्डों की संख्या तुल्य होगी ॥

इस कारण $\frac{अ}{क} = \frac{२अ}{२क}$

इसी रीति से यह भी सिद्ध हो सक्ता है कि $\frac{अ}{क} = \frac{३अ}{३क} = \frac{न अ}{न क}$ यहां न के स्थान में चाहो जो संख्या मान लो ॥

$\frac{न अ}{न क}$ में एक के न क तुल्य खंड हुए हैं और $\frac{अ}{क}$ में १ के क तुल्य खंड हुए हैं इसलिये $\frac{न अ}{न क}$ का प्रत्येक खंड $\frac{अ}{क}$ के प्रत्येक खंड का $\frac{१}{न}$ भाग हो क्योंकि जब एक ही संख्या में किसी बड़ी संख्या का भाग दिया जाय और उसी संख्या में किसी छोटी संख्या का भाग दिया जाय तो पहिली लब्धि दूसरी लब्धि से छोटी होगी इस कारण १ के न क भाग को न बार लें तो $\frac{न अ}{न क}$ २ $\frac{अ}{क}$ के तुल्य हो ॥

(३५) प्र० क्योंकि $\frac{न अ}{न क} = \frac{अ}{क}$ इससे यह बात निकलती है कि जो एक भिन्न के अंश और हर दोनों में एक ही राशि का भाग दिया जाय तो भिन्न का मान ज्यों का त्यों ही बना रहता है ॥

॥ उदाहरण ॥

(१) $\frac{\text{अ}}{\text{क}} = \frac{\text{अ}\times\text{ग}}{\text{क}\times\text{ग}} = \frac{\text{अग}}{\text{कग}}$ । (२) $\frac{\text{अ}}{\text{क}} = \frac{\text{अ}\times\text{घच}}{\text{क}\times\text{घच}} = \frac{\text{अघच}}{\text{कघच}}$

(३) $\frac{\text{अ}-\text{य}}{\text{य}} = \frac{२\text{अ}-२\text{य}}{२\text{य}}$ (४) $\frac{\text{अ}-\text{य}}{\text{य}} = \frac{\text{अ}^२-\text{अय}}{\text{अय}}$

(५) $\frac{१-\text{य}}{१+\text{य}} = \frac{\text{र}-\text{यर}}{\text{र}+\text{यर}}$ (६) $\frac{३\text{अ}-\text{क}}{२\text{अ}-३\text{क}} = \frac{३\text{अक}-\text{क}^२}{२\text{अक}-३\text{क}^२}$

(७) $३६\text{अ} = \frac{७२\text{अ}}{२} = \frac{२५२\text{अ}}{७}$ (८) $\frac{\text{अय}-\text{य}^२}{२\text{अय}} = \frac{\text{अ}-\text{य}}{२\text{अ}}$

(९) $\frac{२\text{अय}-२\text{य}^२}{२\text{अय}} = \frac{\text{अ}-\text{य}}{\text{अ}}$ (१०) $\frac{\text{अ}^२+\text{अक}}{\text{अ}^२-\text{अक}} = \frac{\text{अ}+\text{क}}{\text{अ}-\text{क}}$

(११) $\frac{२\text{अ}^२\text{क}-३\text{अक}^२}{७\text{अकग}} = \frac{२\text{अ}-३\text{क}}{७\text{ग}}$

(१२) $\frac{\text{अय}-२\text{अय}^२}{३\text{अय}} = \frac{१-२\text{य}}{३}$

ऊपर जो रीति लिखी है उस्से भिन्नों का लघुतम वा छोटा रूप हो जाता है क्योंकि जब एक भिन्न के अंश और हर दोनों में किसी राशि का निःशेष भाग लग जाय तो उन दोनों में उस राशि का भाग देने से भिन्न का स्वरूप लघुतम हो जायगा और उसके मान में कुछ अंतर न पड़ेगा इसके उदाहरण लिखते हैं ॥

॥ ८ अभ्यास के लिये उदाहरण ॥

(१) $\frac{२\text{अय}}{३\text{य}}$ का लघुतम रूप करो ॥

(२) $\frac{४\text{अकग}}{२\text{अग}}$ का तथा ॥

(३) $\frac{२० अ क प}{१५ अ प^{२}}$ का तथा

(४) $\frac{३ अ क य^{२}}{६ अ य}$ का तथा

(५) $\frac{७५ अ प^{२} र^{३}}{१५ अ^{२} र^{३}}$ का तथा

(६) $\frac{अ^{२} क य}{२ अ क^{४} य^{२}}$ का तथा

(७) $\frac{म य - न य}{म न य}$ का तथा

(८) $\frac{२ य^{२} - ३ य}{५ य}$ का तथा

(९) $\frac{१४ अ^{३} + २१ अ^{२}}{७ अ^{२} क}$ का तथा

(१०) $\frac{४ क ग + २ ग}{२ अ ग}$ का तथा

(११) $\frac{३ अ य - २ य^{२}}{२ अ य - ३ य^{२}}$ का तथा

(१२) $\frac{म न य म^{२} प + म प^{२}}{म^{२} प - प न प + म प^{२}}$

॥ भिन्नोंके जोड़ने और घटाने की रीति ॥

॥ ३६ प्र० दो वा अधिक भिन्नों के जोड़ने की रीति ॥

प्रथम जो सब भिन्नों के एक ही हर हों तो उनके अंशों को जोड़के योगके तले वही हर रखदो ॥

जैसे $\frac{१}{४}+\frac{२}{४}=\frac{३}{४}$ वैसे ही $\frac{अ}{क}+\frac{ग}{क}=\frac{अ+ग}{क}$ ॥

क्योंकि $\frac{अ}{क}$ और $\frac{ग}{क}$ हर एक भिन्न में १ के क तुल्य खंड किये गये हैं और वैसे अ और ग खंड लिये गये हैं इसलिये वैसे अ और ग खंडों का योग $\frac{अ+ग}{क}$ के तुल्य है इसका यह अर्थ है कि १ के क तुल्य खंड किये गये हैं और वैसे अ और ग खंड लिये गये हैं इस रीति से $\frac{अ}{क}+\frac{ग}{क}+\frac{घ}{क}$ $=\frac{अ+ग+घ}{क}$ और ऐसे ही चार वा अधिक भिन्नों का योग हो सक्ता है ॥

दूसरे जो भिन्नों के हर एक से न हों तो उन के स्थान में ऐसे भिन्न रक्खो कि उन के मान में तो अंतर न हो और उन के हर एक से हों यह बात ३४ प्रक्रम के अनुसार हो सक्ती है, जैसे $\frac{अ}{क}$ और $\frac{ग}{घ}$ इन दोनों भिन्नों का जिन के हर जुदे हैं योग करो ॥

३४ प्र॰ के अनुसार $\frac{अ}{क}=\frac{अघ}{कघ}$ और $\frac{ग}{घ}=\frac{कग}{कघ}$ इस कारण $\frac{अ}{क}+\frac{ग}{घ}=\frac{अघ}{कघ}+\frac{कग}{कघ}=\frac{अघ+कग}{कघ}$ पहिली रीति के अनुसार ॥

$\frac{अ}{क},\frac{ग}{घ},\frac{च}{ज}$ इन भिन्नों का योग करो ॥

$\frac{अ}{क}=\frac{अ\ घ\ ज}{क\ घ\ ज}$, $\frac{ग}{घ}=\frac{ग\times कज}{घ\times कज}=\frac{क\ ग\ ज}{क\ घ\ ज}$ क्योंकि ॥

५ प्रक्रम के अनुसार ग $\times$ क $=$ कग और घ $\times$ क $=$ कघ और ऐसे ही $\frac{च}{ज}=\frac{क\ घ\times च}{क\ घ\times ज}=\frac{क\ घ\ च}{क\ घ\ ज}$ इस कारण $\frac{अ}{क}+\frac{ग}{घ}+\frac{च}{ज}=$

$$\frac{अघज}{कघज}+\frac{क\ ग\ ज}{क\ घ\ ज}+\frac{कघच}{कघज}=\frac{अघज+क\ ग\ ज+कघच}{क\ घ\ ज}$$

इसी रीति से चार वा अधिक भिन्नों का योग हो सक्ता है ॥

भिन्नों के जोड़ने की जो रीति अंक गणित में लिखी है वह ऊपर जो उदाहरण लिखे हैं उन से निकलती है ॥

॥ रीति ॥

प्रत्येक भिन्न के अंश को अपना हर छोड़ औरों के हरों से गुणदो इन घातों का योग इष्ट योग का अंश होगा और सब भिन्नों के हरों का घात इष्ट योग का हर होगा ॥

३७ प्र० एक भिन्न में से दूसरे भिन्न के घटाने की रीति जोड़ने में जो क्रिया करनी पड़ती है वही क्रिया घटाने में भी करते हैं केवल इतना अंतर है कि एक भिन्न के अंश को दूसरे भिन्न के अंश में से घटा देते हैं ॥

जैसे $\frac{अ}{क} - \frac{ग}{क} = \frac{अ - ग}{क}$ और $\frac{अ}{क} - \frac{ग}{घ} = \frac{अघ - कग}{क घ}$

जो किसी राशि को भिन्न के स्वरूप में लाना चाहें तो उस के नीचे १ हर लिख दो जैसे $अ = \frac{अ}{१}$, $य = \frac{य}{१}$ $अ - क = \frac{अ - क}{१}$ आदि। इस का यह कारण है कि ३४ प्रक्रम के अनुसार $अ = \frac{अ \times १}{१} = \frac{अ}{१}$ ॥

॥ उदाहरण ॥

(१) $\frac{अ}{य}$, $\frac{क}{य}$, और $\frac{ग}{य}$ इन का योग करो इन सबों के एक से हर हैं इस कारण $\frac{अ + क + ग}{य}$ योग हुआ ॥

(२) $\frac{अ}{य}$ और $\frac{क}{२य}$ इनका योग करो इन भिन्नों के हर जुदे हैं परन्तु $\frac{अ}{य} = \frac{२अ}{२य}$ इसलिये $\frac{२अ}{२य} + \frac{क}{२य} = \frac{२अ + क}{२य}$ यही योग हुआ

(३) $\frac{१}{२}$ और $\frac{य}{२क्ष}$ इन का योग करो

$\frac{१}{२} = \frac{क्ष}{२क्ष}$, ∴ योग $= \frac{क्ष}{२क्ष} + \frac{य}{२क्ष} = \frac{क्ष + य}{२क्ष}$

(४) $\frac{य}{२}$, $\frac{य}{३}$ और $\frac{य}{४}$ इनका योग करो॥

$\frac{य}{२} = \frac{३ \times ४ \times य}{३ \times ४ \times २} = \frac{१२य}{२४}$; $\frac{य}{३} = \frac{२ \times ४ \times य}{२ \times ४ \times ३} = \frac{८य}{२४}$

और $\frac{य}{४} = \frac{२ \times ३ \times य}{२ \times ३ \times ४} = \frac{६य}{२४}$ ∴ योग $= \frac{१२य}{२४} + \frac{८य}{२४} + \frac{६य}{२४} = \frac{२६य}{२४}$ ॥

(५) $\frac{१}{य}$, $\frac{१}{२य}$ और $\frac{१}{३य}$ इन का योग करो॥

$\frac{१}{य} = \frac{१ \times २य \times ३य}{य \times २य \times ३य} = \frac{६य^२}{६य^३}$; $\frac{१}{२य} = \frac{१ \times य \times ३य}{२य \times य \times ३य} = \frac{३य^२}{६य^३}$ और $\frac{१}{३य} = \frac{१ \times य \times २य}{३य \times य \times २य} = \frac{२य^२}{६य^३}$ ॥

इसलिये योग $= \frac{६य^२}{६य^३} + \frac{३य^२}{६य^३} + \frac{२य^२}{६य^३} = \frac{११य^२}{६य^३}$

इसका लघुतम रूप ३५ प्र०के अनुसार $\frac{११}{६य}$ यह हुआ॥

इस उदाहरण को जोड़ने की रीति के अनुसार किया परन्तु इस में बहुत क्रिया करनी पड़ी इसलिये हम इस उदाहरण को इस रीति से करते हैं कि हर एक भिन्न का ६य हर ऐसी रीति से रक्खो कि उन के मान में अंतर न पड़े॥

$\frac{१}{य} = \frac{६ \times १}{६ \times य} = \frac{६}{६य}$, $\frac{१}{२य} = \frac{३ \times १}{३ \times २य} = \frac{३}{६य}$, $\frac{१}{३य} = \frac{२ \times १}{२ \times ३य}$

$= \frac{२}{६य}$ ∴ योग $= \frac{६+३+२}{६य} = \frac{११}{६य}$ यही उत्तर पहिले भी आया था हरों के लघुतम समापवर्त्य में प्रत्येक भिन्न के हर का भाग निश्शेष लग सक्ता है इस लिये इन लब्धियों से अपने २ अंश और हर को गुणा करो तो भिन्नों के समच्छेद लघुतम रूप में हो जांयगे ॥

॥ उदाहरण ॥

(१) $\frac{य}{२}$, $\frac{य}{३}$ और $\frac{य}{४}$ इन का योग करो ॥

हरों का लघुतम समावर्त्य १२ है जिसमें २, ६ बार जा सक्ता है ३, ४ बार और ४, ३ बार इसलिये प्रत्येक भिन्न के अंश और हर को ६, ४ और ३ से जुदा जुदा गुणा $\frac{य}{२} = \frac{६य}{१२}$, $\frac{य}{३} = \frac{४य}{१२}$, $\frac{य}{४} = \frac{३य}{१२}$ ∴ योग =

$\frac{६य}{१२} + \frac{४य}{१२} + \frac{३य}{१२} = \frac{१३य}{१२}$ ॥

(२) $\frac{७य}{६}$, $\frac{३य}{५}$ और $\frac{य}{३०}$ इनका योग करो ॥

इनके हरों का लघुतम रूप समच्छेद ३० है ॥

$\frac{७य}{६} = \frac{३५य}{३०}$, $\frac{३य}{५} = \frac{१८य}{३०}$ ॥

∴ योग $= \frac{३५य + १८य + य}{३०} = \frac{५४य}{३०} = \frac{९य}{५}$ ॥

(३) $\frac{य}{२अ}$, $\frac{य}{६अक}$ और $\frac{य}{८अक}$ इन का योग करो ॥

इन के हरों का लघुतम रूप समच्छेद २४अक है

और यह ३२ अक्रम के तीसरे उदाहरण में लिखा है और २४ अक में २ अ, १२ क बार जा सकता है और ६ अक, ४ बार और ८ अक, ३ बार $\therefore \frac{य}{२अ} = \frac{१२कय}{२४अक}$

, $\frac{य}{६अक} = \frac{४य}{२४अक}$, $\frac{य}{८अक} = \frac{३य}{२४अक}$,

$$\therefore योग = \frac{१२कय + ४य + ३य}{२४अक} = \frac{१२कय + ७य}{२४अक}$$

(४) $\frac{२अ}{७क}$ को $\frac{९अ}{७क}$ में से घटाओ

$$\frac{९अ}{७क} - \frac{२अ}{७क} = \frac{९अ - २अ}{७क} = \frac{७अ}{७क} = \frac{अ}{क} \text{ ॥}$$

(५) $\frac{३य}{२४र}$ को $\frac{३य}{४र}$ में से घटाओ, $\frac{३य}{४र} = \frac{६\times३य}{६\times४र} =$ $\frac{१८य}{२४र}$ $\therefore$ अंतर $= \frac{१८य}{२४र} - \frac{३य}{२४र} = \frac{१५य}{२४र} = \frac{५य}{८र}$ ॥

(६) $\frac{५अक}{४}$ में से $\frac{७अक}{६}$ को घटाओ इन भिन्नों के हरोंका १२ लघुतम रूप समच्छेद है $\frac{५अक}{४} = \frac{१५अक}{१२}$ और $\frac{७अक}{६} = \frac{१४अक}{१२}$ $\therefore$ अंतर $= \frac{१५अक}{१२} -$ $\frac{१४अक}{१२} = \frac{अक}{१२}$ ॥

॥ ९ अभ्यास के लिये उदाहरण ॥

(१) $\frac{य}{५}$, $\frac{२य}{५}$ और $\frac{३य}{५}$ इन का योग करो

(२) $\frac{२अक}{३}$ और $\frac{अक}{६}$ तथा ॥

(१६) $\frac{य}{अ}$, $\frac{र}{क}$, $\frac{ल}{ग}$ तथा ॥

(१७) $\frac{यर — अक}{अक}$, $\frac{यर — कग}{कग}$ और २ तथा ॥

(१८) $\frac{अ - क}{अक}$, $\frac{क - ग}{कग}$ और $\frac{ग — अ}{अग}$ ॥

(१९) $\frac{४य}{५}$ को $\frac{९य}{१०}$ में से घटाओ ॥

(२०) $\frac{७य}{८}$ को य, में से घटाओ ॥

(२१) $\frac{५य + ४}{६}$ को $\frac{१०य + २७}{१८}$ तथा ॥

(२२) $\frac{२य — ३}{४}$ को $\frac{५य — १}{८}$ तथा ॥

(२३) $\frac{३र + य + १३}{१०}$ को $\frac{३य + र}{५} + २$ ॥

(२४) $\frac{१५ + ३य}{य + १}$ को $७ + \frac{२४}{य + १}$ ॥

(२५) $\frac{३}{य} + \frac{४}{य}$ को $\frac{३}{य} + \frac{५}{य}$ तथा ॥

(२६) $\frac{य}{य + १}$ को $\frac{३य}{य + २}$ में से घटाओ ॥

(२७) $\frac{२य — ७}{११}$ को $\frac{३य + ७}{१४}$ तथा

(२८) $\frac{य}{१०} + \frac{४}{२५}$ को $\frac{११य — १३}{२५}$ तथा ॥

(२९) $\frac{अ}{क+गय}$ को $\frac{य}{क}$ तथा ॥

(३०) $\frac{२य}{य+र}$ को $\frac{य+र}{र}$ तथा

(३१) $\frac{२}{१+य}$ को $\frac{३+२य}{१+य+२य}$

(३२) $\frac{य-र}{य+र}$ को $\frac{य+र}{य-र}$ ॥

॥ भिन्नों के गुणा करने और भाग देने की रीति ॥

। सू ५० भिन्न को पूर्णांक से गुणा करने की रीति ॥

भिन्न के अंश को पूर्णांक से गुणा करो और घात के नीचे भिन्न का हर रखदो। जैसे $ग \times \frac{अ}{क} = \frac{अग}{क}$ ॥

$\frac{अ}{क}$ और $\frac{अग}{क}$ इन दोनों भिन्नों में १ के क तुल्य खंड किये हैं और $\frac{अ}{क}$ भिन्न में वैसे तुल्य खंड अ लिये हैं और $\frac{अग}{क}$ भिन्न में अ, से तुल्य खंड ग बार लिये हैं इस कारण $\frac{अग}{क}$ भिन्न $\frac{अ}{क}$ भिन्न की अपेक्षा ग बार बड़ा है ॥

॥ उदाहरण ॥

(१) $\frac{अ}{क}$ को २ से गुणा करो ॥

घात $= \frac{२अ}{क}$ क्योंकि दो गुणा $\frac{अ}{क} = \frac{अ}{क} + \frac{अ}{क} = \frac{अ+अ}{क} = \frac{२अ}{क}$ ॥

(२) $\frac{अय}{कर}$ को म से गुणा करो ॥ $म \times \frac{अय}{कर} = \frac{मअय}{कर}$

वही घात हुआ ॥

(३) $\frac{अ - य}{अ + य}$ को ७ से गुणा करो, घात $= ७ \times \frac{अ - य}{अ + य}$

$= \frac{७अ - ७य}{अ + य}$ ॥

(४) $\frac{अ - य}{क}$ को २ अ से गुणा करो, घात $= २अ \times \frac{अ - य}{क}$

$= \frac{२अ^{२} - २अय}{क}$ ॥

१३९ प्र० भिन्न में पूर्णांक के भाग देने की रीति ॥

जो भिन्न के अंश में पूर्णांक का पूरा भाग लग जाय तो ल ब्धि के नीचे भिन्न के हर को रख दो वा भिन्न के हर को पूर्णांक से गुणा करो और इस घात को हर मान इस के ऊपर भिन्न का अंश लिखो, जैसे $\frac{अग}{क} \div ग = \frac{अ}{क}$ और $\frac{अ}{क} \div ग$ $= \frac{अ}{कग}$ क्योंकि ३८ प्र० के अनुसार ग गुणा $\frac{अ}{क} = \frac{अग}{क}$ इसलिये $\frac{अग}{क}$ का ग वाँ भाग अर्थात् $\frac{अग}{क} \div ग =$ $\frac{अ}{क}$ ॥

और क्योंकि १०४ प्रक्रम के अनुसार $\frac{अ}{क} = \frac{अग}{कग}$ और ३८ प्रक्रम के अनुसार $\frac{अग}{कग} =$ ग गुणा $\frac{अ}{कग}$ इस कारण $\frac{अ}{क}$ भी = ग गुणा $\frac{अ}{कग}$ और $\frac{अ}{क}$, $\frac{अ}{कग}$ की अपेक्षा ग गुणा बड़ा है इसलिये $\frac{अ}{क}$ का ग वाँ भाग वा $\frac{अ}{क} \div ग =$ $\frac{अ}{कग}$ भाग देने की यही रीति लिखी है ॥

॥ उदाहरण ॥

(१) $\frac{२अ}{क}$ में २ का भाग दो, उत्तर $\frac{अ}{क}$, क्योंकि २अ ÷ २ = अ ॥

(२) $\frac{म अ य}{कर}$ में म, का भाग दो क्योंकि म अ य ÷ म = अ य ॥ ∴ लब्धि = $\frac{अ य}{क र}$ ॥

(३) $\frac{७अ - ७य}{अ + य}$ में ७ का भाग दो क्योंकि अंश ÷ ७ = अ - य

∴ लब्धि = $\frac{अ - य}{अ + य}$ ॥

(४) $\frac{२अ क - २अ^२}{ग}$ में २अ का भाग दो ॥

क्योंकि २अ क — २अ^२ में २अ का भाग दिया तो क — अ लब्धि हुई इसलिये लब्धि = $\frac{क - अ}{ग}$ ॥

१४० प्रक्रम एक भिन्न को दूसरे भिन्न से गुणा करने की रीति

अंश को अंश से गुणा करो और हर को हर से ॥

जैसे $\frac{अ}{क} \times \frac{ग}{घ} = \frac{अ ग}{क घ}$ ॥

$\frac{अ}{क} \times \frac{ग}{घ}$ इसका यह अर्थ है कि $\frac{ग}{घ}$ को $\frac{अ}{क}$ बार गुणा करना है $\frac{ग}{घ}$ को अ गुणा किया तो $\frac{अ ग}{घ}$ लब्धि हुई परन्तु ३२ प्रक्रम के अनुसार $\frac{अ}{क}$ का अर्थ है अ, का कवाँ भाग और $\frac{ग}{घ}$ को अ बार गुणा नहीं करना है परंतु उसे अ, के कवें भाग बार गुणा करना है इसकारण $\frac{अ ग}{घ}$ का क, वां भाग अर्थात् $\frac{अ ग}{घ} ÷ क = \frac{अ ग}{क घ}$ ३९ प्रक्रम के अनुसार ॥

∴ $\frac{अ}{क} \times \frac{ग}{घ} = \frac{अ ग}{क घ}$ - यही रीति है ॥

अनुमान क्योंकि $\frac{अ}{क} \times \frac{ग}{घ} = \frac{अग}{कघ}$ ॥

$\therefore \frac{अ}{क} \times \frac{ग}{घ} \times \frac{च}{ज} = \frac{अग}{कघ} \times \frac{च}{ज} = \frac{अगच}{कघज}$ ॥

॥ इसी रीति से चार वा अधिक भिन्नों का गुणा हो सक्ता है

॥ उदाहरण ॥

(१) $\frac{२}{अ}$ को $\frac{क}{ग}$ से गुणा करो उत्तर $\frac{२क}{अग}$ ॥

(२) $\frac{अ-य}{र}$ को $\frac{६}{य}$ से गुणा करो, $\frac{६}{य} \times \frac{अ-य}{र} = \frac{६अ-६य}{यर}$

(३) $\frac{२अ}{३र}$ को $\frac{क}{य}$ से गुणा करो, $\frac{२अ}{३र} \times \frac{क}{य} = \frac{२अ \times क}{३र \times य} = \frac{२अक}{३यर}$ ॥

(४) $\frac{य^२}{अ}$ को $\frac{य}{अ}$ से गुणा करो, घात $= \frac{य^२ \times य}{अ \times अ} = \frac{य^३}{अ^२}$ ॥

(५) $\frac{अक}{४यर}$ को $\frac{२अक}{५यर}$ से गुणा करो ॥

घात $= \frac{अक \times २अक}{४यर \times ५यर} = \frac{२अ^२क^२}{२०य^२र^२}$ ॥

पाँच वें उदाहरण में जो उत्तर लिखा है उसका लघुतम रूप नहीं हुआ है क्योंकि उसके अंश और हर दोनों में २ का निःशेष भाग लग सक्ता है गुणा करने के पहिले हमें देखना चाहिये था कि इष्ट घात के अंश और हर दोनों का २ सम गुणक रूप अवयव है इस कारण उसे छोड़ देना चाहिये था क्योंकि भिन्न के अंश और हर दोनों

में एक राशि का भाग देने से भिन्न का मान बदलता नहीं ऐसे ही जो दृष्ट घात के अंश और हर दोनों में जो एक से अधिक गुणक रूप अवयव हों तो उनको अंश और हर दोनों में से निकाल डालो इससे घात का लघुतम रूप हो जायगा ॥

॥ उदाहरण ॥

(६) $\frac{२य}{३}$ को $\frac{३य}{५}$ से गुणा करो ॥

$\frac{२य}{३} \times \frac{३य}{५} = \frac{२य^२}{५}$ घात के अंश और हर दोनों के गुणक रूप अवयव ३ को निकाल डाला ॥

(७) $\frac{४य}{५}$ को $\frac{५य}{४}$ से गुणा करो ॥

घात $= \frac{४य \times ५य}{५ \times ४}$ इसके अंश और हर दोनों में ४ और ५ गुणक रूप अवयव हैं इस कारण उनको निकाल डाला तो अंश $=$ य $\times$ य $=$ य^२ और हर $= १ \times १ = १$ और घात $=$ $\frac{य^२}{१}$ वा य^२ परंतु इस घात को एक ही बार देखकर निकाल लेना चाहिये जैसे $\frac{४य}{५} \times \frac{५य}{४} =$ य^२ ॥

(८) $\frac{२य-५}{४}$ को ४ से गुणा करो, इस प्रश्न को देखते ही मालूम होता है कि घात $=$ २य $-$ ५ है क्योंकि किसी एक पदार्थ वा राशि की चौथाई को चौगुना करे तो घात संपूर्ण पदार्थ वा राशि के तुल्य होगा ॥

(९) $\frac{२य-५}{४}$ को ८ से गुणा करो ॥

इस प्रश्न में २य $-$ ५ में ४ का भाग लगा है और वही राशि ८ में गुणी गई है इस लिये ४ का भाग देने

और ८ से गुणा करने के स्थान में २ य — ५ को २ से गुणा तो घात ४ य — २० के तुल्य हुआ ॥

(१०) $\frac{२य — ५}{१६}$ को ८० से गुणा करो ॥

$\frac{८०}{१६}$ = ५ ∴ घात = ५ गुणा २य — ५ वा १०य — २५ ॥

(११) $\frac{अ + क}{अ}$ को $\frac{अ — क}{क}$ से गुणा करो ॥

घात = $\frac{अ + क}{अ} \times \frac{अ — क}{क}$ और अ + क को अ — क से गुणा तो $अ^२ — क^२$ हुआ इसकारण घात = $\frac{अ^२ — क^२}{अ क}$

॥ ४९ प्र० एक भिन्न में दूसरे भिन्न के भाग देने की रीति ॥

॥ रीति ॥

जो भिन्न भाजक हो उस को पलट दो अर्थात् उसके अंश के स्थान में हर रक्खो और हर के स्थान में अंश लिखो फिर भिन्न गुणन की रीति से दोनों भिन्नों का गुणा करलो। जैसे $\frac{अ}{क} \div \frac{ग}{घ} = \frac{अ}{क} \times \frac{घ}{ग} = \frac{अ घ}{क ग}$ ॥

क्योंकि लब्धि एक ऐसी राशि होती है कि जो उसे भाजक से गुणा करो तो घात भाज्य के तुल्य होगा इस कारण जो भाज्य के ऐसे दो गुणक रूप अवयव कर लिये जांय कि उन में एक भाजक के तुल्य हो तो दूसरा गुणक रूप अवयव लब्धि के तुल्य होगा ऊपर जो उदाहरण लिखा है उसमें $\frac{अ}{क}$ भाज्य है और $\frac{अ}{क}$ बराबर $\frac{अ \times ग घ}{क \times ग घ} = \frac{अ ग घ}{क ग घ}$ =

$\frac{ग अ घ}{घ क ग} = \frac{ग}{घ} \times \frac{अ घ}{क ग}$ इसमें $\frac{ग}{घ}$ गुणक रूप अवयव भाजक है इस कारण दूसरा गुणक रूप अवयव $\frac{अ घ}{क ग}$

लब्धि है ॥

॥उदाहरण॥

(१) $\frac{२}{य}$ में $\frac{३}{र}$ का भाग दो॥

$\frac{२}{य} \div \frac{३}{र} = \frac{२}{य} \times \frac{र}{३} = \frac{२र}{३य}$ ॥

(२) $\frac{अय}{कर}$ में $\frac{अ}{क}$ का भाग दो ॥

$\frac{अय}{कर} \div \frac{अ}{क} = \frac{अय}{कर} \times \frac{क}{अ} = \frac{अकय}{अकर} = \frac{य}{र}$ ३५१ क्रम के अनुसार॥

(३) $\frac{२अक}{३यर}$ में $\frac{क}{य}$ का भाग दो ॥

$\frac{२अक}{३यर} \div \frac{क}{य} = \frac{२अक}{३यर} \times \frac{य}{क} = \frac{२अकय}{३कयर} =$

$\frac{२अकय}{३रकय} = \frac{२अ}{३र}$ ॥

(४) $\frac{२अ^२क}{१०य^२र}$ में $\frac{अक}{२यर}$ का भाग दो॥

$\frac{२अ^२क}{१०य^२र} \div \frac{अक}{२यर} = \frac{२अ^२क}{१०य^२र} \times \frac{२यर}{अक} =$

$\frac{२अ.अक.२यर}{५यर.२यर.अक} = \frac{२अ}{५यर}$ ॥

(५) $\frac{अ-य}{४}$ में २अ का भाग दो॥

$\frac{अ-य}{४} \div \frac{२}{अ} = \frac{अ-य}{४} \times \frac{अ}{२} = \frac{अ^२-अय}{८}$

(६) $\frac{अ^२-य^२}{अय}$ में $\frac{अ+य}{अ}$ का भाग दो॥

$$\frac{अ^2 - य^2}{अय} \div \frac{अ+य}{अ} = \frac{अ^2 - य^2}{अय} \times \frac{अ}{अ+य} = \frac{अ-य}{य}$$

$$\frac{अ+य \;\; अ}{अय \;\; अ+य} = \frac{अ-य}{य} \;\; ॥$$

(७) $\frac{१+य^2+२य}{३य}$ में $\frac{१+य}{२य}$ का भाग दो ॥

लब्धि $= \frac{१+य^2+२य}{३य} \cdot \frac{२य}{१+य} = \frac{१+य}{३} \cdot \frac{१+य}{य} \cdot \frac{२य}{१+य} =$

$\frac{१+य}{३} \times २ = \frac{२+२य}{३}$ ॥

॥ अभ्यास के लिये उदाहरण ॥

(१) $\frac{य}{३}$ को ३ से गुणा करो ॥

(२) $\frac{३य}{२}$ को २ से ॥

(३) $\frac{५य}{४}$ को २ से ॥

(४) $\frac{य}{३}$ को ६ से ॥

(५) $\frac{अ-य}{२}$ को ४ से ॥

(६) $\frac{७य}{१५}$ को ६० से ॥

(७) $\frac{२य}{२१}$ को ८४ से ॥

(८) $\frac{३य-५}{२}$ को ६ से ॥

(९) $\frac{१२+८य}{१६}$ को ८० से ॥

(१०) $\frac{८-७य}{४\frac{१}{२}}$ को ८ से ॥

(११) $\frac{६य+१३}{१\frac{३}{४}}$ को १५ से ॥

(१२) $\frac{२य-१}{७\frac{१}{२}}$ को १५ से ॥

(१३) $\frac{३य+४}{५\frac{१}{२}}$ को ११ से ॥

(१४) $\frac{य-१\frac{२}{३}}{२\frac{२}{३}}$ को ७ से

(१५) $\frac{२\frac{१}{२}-\frac{३}{४}य}{२\frac{१}{२}}$ को १० से ॥

(१६) $\frac{३य}{२}$ को २ से ॥

(१७) $\frac{३य}{२}$ को $\frac{२य}{२}$ से ॥

(१८) $\frac{२-३य}{४}$ को $\frac{४}{५}$ से गुणा०

(१९) $\frac{२}{२य}$ को $\frac{२}{य}$ से ॥

(२०) $\frac{य}{र}+\frac{र}{य}$ को यर−यर से

(२१) $\frac{२य}{२}$ में ५ का ॥भाग दो॥

(२२) $\frac{२य}{४}$ में ५ का भाग दो

(२३) $\frac{२य}{४}$ में ६ का भाग दो

(२४) $\frac{२१अय}{४र}$ में ७अ का०॥

(२५) $\frac{२मन}{प}$ में २म का०॥

(२६) $\frac{२य-४यर}{र}$ में २य का ॥

(२७) $\frac{३अ+६अक}{४}$ में ३अ का०

(२८) $\frac{५यर}{ल}$ में $\frac{२य}{र}$ का०

(२९) $\frac{२अकग}{३घ}$ में $-\frac{अग}{कघ}$ का०

(३०) $\frac{अ^२यर}{२कग}$ में $-\frac{अर}{४य}$ का०

(३१) $य+\frac{१}{य}$ को $य+\frac{१}{य}$ से गु० करो

(३२) $\frac{य}{र}+य$ को $\frac{र}{य}+\frac{१}{य}$ से

(३३) $\frac{१}{१+य}+\frac{१}{१-य}$ को $\frac{१}{२}$ से ॥

(३४) $१-\frac{२अ}{१+अ}$ को $१+\frac{२अ}{१-अ}$ से ॥

(३५) $\frac{१}{२}+\frac{म-३}{२}$ को $\frac{१}{२}+\frac{म-२}{३}$ से

(३६) $\frac{अ}{क}+\frac{१}{२}-\frac{क}{अ}$ को $\frac{क}{अ}-\frac{१}{३}\cdot\frac{अ}{क}$ से

(३७) $\frac{अ^२-अय}{क}$ को $\frac{क^२}{अ-य}$ से गुणा करो ॥

(३८) $\frac{अ^२+अय+य^२}{अ^२-अय+य^२}$ को $\frac{अ-य}{अ+य}$ से ॥

(३९) $२+\frac{२}{य}$ में $१-\frac{२}{य}$ का भाग दो ॥

(४०) $\frac{\text{१} - \text{य}}{\text{२}}$ में $\frac{\text{य}}{\text{१} - \text{य}}$ का भाग दो॥

(४१) $\frac{\text{ग} - \text{३ अ}}{\text{२ अ ग}}$ में $\frac{\text{२ अ क}}{\text{४ अ क}}$ का॥

(४२) १ में $\text{१} + \frac{\text{य}}{\text{४} - \text{य}}$ का भाग दो॥

(४३) $\frac{\text{१}}{\text{२}}$ में $\frac{\text{१}}{\text{२}} - \frac{\text{य}}{\text{२}}$ का भाग दो॥

(४४) $\frac{\text{१}}{\text{१} + \text{य}}$ में $\text{१} - \frac{\text{१}}{\text{१} + \text{य}}$ का भाग दो॥

(४५) अक में $\frac{\text{क}^{\text{२}}}{\text{अ} - \text{य}}$ का भाग दो॥

(४६) $\frac{\text{अ}^{\text{२}} - \text{य}^{\text{२}}}{\text{अ}^{\text{२}} + \text{य}^{\text{२}}}$ में $\frac{\text{अ} - \text{य}}{\text{अ} + \text{य}}$ का भाग दो॥

४२ प्र० जैसे एक संपूर्ण राशि के स्थान में एक अक्षर लिख देते हैं और उस पर जो क्रिया करनी होती है उस का चिन्ह उस अक्षर के साथ लगा देते हैं वैसे ही जब दो वा अधिक पद वा गुणक रूप अवयवों की राशि को एक संपूर्ण राशि मानते हैं तो उसे ऐसे एक कोष्ठ ( ), { }, [ ] के भीतर लिखते हैं और जो उस संपूर्ण राशि पर क्रिया करनी होती है उसका चिन्ह कोष्ठ के साथ लगा देते हैं कोष्ठ शब्द का अर्थ कोठा है॥

जैसे अ + (क — ग) इस का अर्थ है कि क — ग को अ में जोड़ना है अ — (क — ग) इस का यह अर्थ है

कि क—ग को अ में से घटाना है अ × (क—ग) इसका अर्थ है कि क—ग को अ से गुणा करना है (क—ग) ÷ अ इसका अर्थ है कि क—ग में अ का भाग देना है

(क—ग)^2 इसका अर्थ है कि क—ग का वर्ग करना है

$\sqrt{(\text{क—ग})}$ तथा क—ग का वर्ग मूल लेना है॥

(अक)^2 तथा अ गुणा क का वर्ग करना है॥

कोष्ठ के मिटाने से राशि का अर्थ पलट जाता है जैसे क—ग को अ बार गुणा करना हो तो अ × (क—ग) यों लिखेंगे और जो कोष्ठ न लिखें जैसे अ × क—ग तो यह अक—ग के तुल्य है और अ(क—ग) अक—अग के तुल्य है ऐसे ही क—ग का वर्ग लिखना हो तो (क—ग)^2 यों लिखेंगे और जो कोष्ठ न लिखें जैसे क—ग^2 तो इसका अर्थ है कि क में से ग का वर्ग घटाना है और (क—ग)^2 इसका अर्थ है कि क—ग राशि का वर्ग करना है और वह क^2—२कग+ग^2 के तुल्य है॥

४२ प्र० कोष्ठ के स्थान में संपूर्ण पद वा गुणक रूप अवयवों के ऊपर एक ——— ऐसी सीधी रेखा कर देते हैं और उसे शृंखल कहते हैं शृंखल शब्द का अर्थ सांकल वा जंजीर है॥

जैसे अ— $\overline{\text{क—ग}}$ इसका वही अर्थ है जो अ—(क—ग) का है $\sqrt{\text{क—ग}}$ इसका वही अर्थ है जो $\sqrt{(\text{क—ग})}$ का है॥

$\overline{\text{क—ग}}^2$ तथा (क—ग)^2 का है॥

और यह बात भी याद रक्खो कि चिह्न के अंश और

हर दोनों के बीच जो रेखा होती है उसे अंश और हर दोनों का शृंखल जानो॥

जैसे $\frac{क-ग}{ख}$ इसका वह अर्थ है जो $\overline{क-ग}\div ख$ का है व $क-ग\div\overline{ख}$ का है और $\frac{ख-क}{ग-घ}$ इसका भी वही जो $\overline{ख-क}\div\overline{ग-घ}$ वा (ख-क) ÷ (ग-घ) का अर्थ है॥

४४ प्र० कोष्ठ वा शृंखल के साथ जिस क्रिया का चिन्ह लगा हो जब तक वह क्रिया पूरी न हो जाय तब तक उस कोष्ठ वा शृंखल को मत मिटाओ॥

जैसे ख+(क-ग) यह कोष्ठ केवल इसी अर्थ से रक्खा है कि क-ग संपूर्ण राशि को ख में जोड़ना है और इसलिये इस क्रिया का चिन्ह कोष्ठ के बाईं ओर लगा है और जब दोनों राशि जुड़ जांय तब कोष्ठ का रखना कुछ अवश्य नहीं ऐसे ही ख-(क-ग) इस में कोष्ठ के पहिले जो - चिन्ह आया है उसका अर्थ है कि क-ग संपूर्ण राशि को ख में से घटाना है और जब वह उस में से घट जाय तब कोष्ठ को मिटा दो॥

॥पहिले उदाहरण की रीति॥

१८ प्रक्रम के अनुसार क-ग और ख इनका योग करना यही है कि उनको अपने २ चिन्ह सहित एक सीध में लिखदो जैसे ख+क-ग इसलिये जब योग के लिये कोष्ठ आवे वा उसके पहिले + चिन्ह हो तो कोष्ठ रखना कुछ अवश्य नहीं॥

१९ प्रक्रम के अनुसार जब एक राशि को दूसरी राशि में

से घटाते हैं तो जिस राशि को घटाते हैं उसके सब पदों के चिन्ह बदल देते हैं अर्थात् + के स्थान में − लिखते हैं और − के स्थान + चिन्ह रखते हैं और फिर जोड़ने की रीति से योग करते हैं जैसे क − ग को अ में से घटाना हो तो हम क − ग के स्थान में − क + ग रक्खेंगे और इसे अ में जोड़ देंगे जैसे अ − क + ग यह २६ प्रक्रम के अनुसार योग हुआ इसलिये जब कोष्ठ के पहिले − चिन्ह हो तो कोष्ठ के भीतर जो चिन्ह हों उन्हें बदल दो अर्थात् + के स्थान में − चिन्ह लिखो और − के स्थान में + चिन्ह रक्खो तिस पीछे कोष्ठ को मिटा दो॥

परंतु जब कोष्ठ के साथ गुण, भाग, घात क्रिया और मूल क्रिया इनमें से कोई क्रिया साथ लगी है तो जब तक वह क्रिया पूरी न हो जाय तब तक कोष्ठ को दूर मत करो

॥दूसरी रीति के उदाहरण अंकों में लिखते हैं॥

जैसे ८ − (६ − ३) इसका यह अर्थ है कि ६ में ३ को घटाकर शेष को ८ में से घटाना है तो ६ − ३ = ३ ∴ ८ − (६ − ३) = ८ − ३ = ५ यह उत्तर हुआ॥

कदाचित् कोष्ठ न करें और ८ − ६ − ३ ऐसे ही लिखदें तो इसका यह अर्थ है कि ८ में से ६ को घटाकर जो बाकी रहे उस में से ३ को घटाना है तो ८ − ६ = २ ∴ ८ − ६ − ३ = २ − ३ = − १ यह उत्तर हुआ॥

इसलिये जो कोष्ठ को मिटाना हो तो उसके भीतर की राशियों के चिन्ह पलट दो। जैसे ८ − (६ − ३) = ८ − ६ + ३ = ५ यही उत्तर पहिले आया था॥

कोष्ठ से कभी दो अर्थ भी निकलते हैं जैसे अ − (अ − क)²

वा $अ^2 - \overline{अ - क}^2$ इस कोष्ट से एक तो यह अर्थ निकलता है कि अ – क संपूर्ण राशि का वर्ग करना है और दूसरा यह कि जब उसका वर्ग निकल आवे तो उस सम्पूर्ण वर्ग के पदों को $अ^2$ में से घटाना है और जब दोनों क्रिया हो जायं तब कोष्ठ को मिटा डालो ॥

॥ उदाहरण ॥

(१) अ + (अ — क) इसका लघुतम रूप करो ॥

अ + (अ — क) = अ + अ – क पहिली रीति से

= २अ — क

(२) अ + क + (अ — क) इस का लघुतम रूप करो ॥

अ + क + (अ — क) = अ + क + अ — क पहिली रीति से = २अ

(३) अ — (अ — क) इसका लघुतम रूप करो ॥

अ — (अ — क) = अ — अ + क दूसरी रीति से

= क

(४) अ + क — (अ — क) इसका लघुतम रूप करो ॥

अ + क — (अ — क) = अ + क — अ + क दूसरी रीति के अनुसार = २क

(५) अग — $\overline{अ — क}$. ग इसका लघुतम रूप करो ॥

अग — $\overline{अ — क}$. ग = अग — $\overline{अग — कग}$

= अग — अग + कग दूसरी रीति के अनुसार = कग

(६) $\frac{अ}{क} — \frac{अ — क}{क}$ इसका लघुतम रूप करो

$\frac{अ}{क} - \frac{अ — क}{क} = \frac{अ — \overline{अ — क}}{क}$ ३ पृ. के ७२ अनुसार

$= \frac{अ - अ + क}{क}$ दूसरी रीति के अनुसार

$= \frac{क}{क}$

$= १$

(७) $२ + \frac{अ + य}{अ - य}$ इसका लघुतम रूप करो॥

$१ + \frac{अ + य}{अ - य} = \frac{अ - य}{अ - य} + \frac{अ + य}{अ - य}$

$= \frac{अ - य + \overline{अ + य}}{अ - य}$ ३६ अक्रम के अनुसार

$= \frac{अ - य + अ + य}{अ - य}$ पहिली रीति के अनुसार

$= \frac{२अ}{अ - य}$

(८) $१ - \frac{अ - य}{अ + य}$ इसका लघुतम रूप करो

$१ - \frac{अ - य}{अ + य} = \frac{अ + य}{अ + य} - \frac{अ - य}{अ + य}$

$= \frac{अ + य - \overline{अ - य}}{अ + य}$ ३७ अक्रम के अनुसार

$= \frac{अ + य - अ + य}{अ + य}$ दूसरी रीति के अनुसार

$= \frac{२य}{अ + य}$

(९) $अ - \frac{ब - क}{२}$ इसको २ से गुणा करो ॥

$२ \times \left(अ - \frac{ब - क}{२}\right) = २अ - २ \times \frac{ब - क}{२}$ गुणा हो

गया इसलिये कोष्ट को दूर किया।

$= २अ - \frac{अ - क}{१}$

$= २अ - अ + क$ दूसरी रीति के अनुसार

$= अ + क$

(१०) $\frac{य}{२} - \frac{य - ६}{५}$ को २० से गुणा करो॥

घात $= १० \times \frac{य}{२} - १० \times \frac{य - ६}{५}$ २२ प्रक्रम के अनुसार

$= \frac{१०य}{२} - \frac{१०(य - ६)}{५}$ ३८ प्रक्रम से

$= ५य - २(य - ६)$

$= ५य - (२य - १२)$

$= ५य - २य + १२$ दूसरी रीति से

$= ३य + १२$

(११) $(अ + क)^2 - (अ - क)^2$ इसका लघुतम रूप करो॥

$(अ + क)^2 - (अ - क)^2 = (अ^2 + २अक + क^2) - (अ^2 - २अक + क^2)$

$= अ^2 + २अक + क^2 - अ^2 + २अक - क^2$

पहिली और दूसरी रीति के अनुसार

$= ४अक$

(१२) $\frac{अ^2 - (क - ग)^2}{(अ + क)^2 - ग^2}$ इसका लघुतम रूप करो॥

अंश $= (अ + \overline{क - ग})(अ - \overline{क - ग})$

$= (अ + क - ग)(अ - क + ग)$

हर $= (अ + क + ग)(अ + क - ग)$

$= (अ+क+ग)\ (अ+क-ग)$

$भिन्न = \frac{(अ+क-ग)}{(अ+क+ग)}\ \frac{(अ-क+ग)}{(अ+क-ग)} = \frac{अ-क+ग}{अ+क+ग}$

॥ उदाहरण ॥

(१) अक अ(ग − क) इसका लघुतम रूप करो ॥

(२) ४(१ + य) + ३य इसका लघुतम रूप करो ॥

(३) २(अ + य) − २(अ − य) इसका तथा ॥

(४) २(अ + क) (अ − क) तथा ॥

(५) ५(१ − य) + (१ + ५य) × २ तथा ॥

(६) $\frac{अ - य}{२} - \frac{५ - २य}{२}$ तथा ॥

(७) $\frac{१}{२}(अ + क) - \frac{१}{२}(अ - क)$ तथा ॥

(८) $(अ + ७)य^{२} + (क - ७)य^{२}$ तथा ॥

(९) २ − (−४ + ५य) इसका लघुतम रूप करो ॥

(१०) $१ - १ - \overline{१ - य}$ तथा ॥

(११) $(२अ - \overline{क + ग}) - (\overline{अ - क - २ग})$ ॥

(१२) $\frac{१}{२}(अ - य)\ (२अ + य) + ३\ य(अ + य)$

(१३) $(१ + य)\ (१ - य)\ (१ + य^{२})$ ॥

(१४) $२\left(य^{२} - \frac{१}{४}\right) \div (२य + १) + \frac{१}{२}$ ॥

(१५) $\frac{१}{२}\left(\frac{\text{अ}}{\text{क}}+\frac{\text{ग}}{\text{घ}}\right)+\frac{१}{२}\left(\frac{\text{अ}}{\text{क}}-\frac{\text{ग}}{\text{घ}}\right)$ ॥

(१६) $\left\{\frac{\text{अ}(\text{अ}+\text{क})+\text{क}^{२}}{\text{अ}}\right\}\div\left\{\text{क}(\text{अ}+\text{क})-\text{अ}^{२}\right\}$ ॥

(१७) $४\times\left\{\frac{३}{८(१-\text{य})}+\frac{१}{८(१+\text{य})}\right\}$ ॥

(१८) $\frac{२\text{य}(२\text{य}-\text{अ})}{(\text{अ}-२\text{य})^{२}}+\frac{\text{अ}}{\text{अ}-२\text{य}}$ ॥

(१९) $\frac{२}{३}(\text{य}+२)\left\{\text{य}+२-\frac{१}{२}(३\text{य}+१)\right\}$

(२०) $\{१-(१-\text{य})\}\,\text{ग}(२+\text{य})$ ॥

॥ एकवर्ग समीकरण ॥

४५ प्र० जो हम कहें कि $२+३=५$ वा $२\times\{१+६\}=१४$ तो इन की सत्यता में हमें कुछ सन्देह नहीं है और इस का ऐसी समता में हम कुछ प्रश्न नहीं कर सकते॥ ऐसे ही

$२\text{य}+३\text{य}=५\text{य}$ वा $२(\text{अ}+\text{य})=२\text{अ}+२\text{य}$

इन की समता में भी कुछ शंका नहीं है क्योंकि हम अच्छी रीति से जानते हैं कि य के स्थान में चाहो सो मान रक्खो परंतु $२\text{य}+३\text{य}$ अवश्य ५य के तुल्य होगा इसमें कुछ सन्देह नहीं तो ऐसी समता को एक रूपता कहते हैं और जो हम कहें कि $\text{य}+४=६$ वा $२(१+\text{य})=७$ ॥ तो ऐसी समता में य का एक नियत मान रखने से समता बनी रहैगी और ऐसी समता को समीकरण कहते हैं और ऐसे समीकरण में य अव्यक्त राशि का मान जिस क्रिया से निकलता है उसे एथक्करण कहते हैं और जब अव्यक्त राशि के मान को उसके स्थान में रखकर समीकरण की सत्यता दिखाते हैं तो उसको आलाप कहते हैं॥

य+४=६ इस समीकरण में य का मान बताओ तो इस प्रश्न में हम देखते हैं कि य को ४ में जोड़ने से ६ होते हैं इस कारण अवश्य य=२॥

२(१+य)=१४ इस समीकरण में य का मान बताओ तो इस प्रश्न में हम देखते हैं कि दोगुणा (१+य), १४ के तुल्य है इस कारण १+य अवश्य ७ के तुल्य होगा और केवल य ६ के तुल्य होगा॥

ऐसे प्रश्नों में अव्यक्त राशि का मान निकालना बहुत कठिन नहीं है परंतु बहुतेरे प्रश्न ऐसे होते हैं कि उन में अव्यक्त राशि बहुत दुलगी रहती है ऐसे प्रश्नों में अव्यक्त राशि का मान निकालने में बीज गणित का बड़ा प्रयोजन पड़ता है इस के अर्थ हम रीतें लिखते हैं और उन सब रीतों की सत्यता इस स्वयसिद्ध परिभाषा से पाई जाती है॥

कि जो तुल्य राशियों पर समान क्रिया की जांय तो उन के फल भी तुल्य होंगे॥

(४६) प्र० जो = इस चिन्ह के दोनों ओर एक ही राशि हो और उस का चिन्ह भी एक सा हो जैसे + वा − हो तो ऐसी राशि को दोनों ओर से निकाल डालो और इस क्रिया को शोधन कहते हैं और हम जानते हैं कि जो तुल्य राशियों में से तुल्य राशि निकाली जांय तो शेष अवश्य तुल्य बचेंगे जैसे जो य+४=७+४ तो = इस चिन्ह के दोनों ओर +४ है उसे निकाल डाला तो य ७ के तुल्य रह गया॥

॥रीति॥

४७ प्र० समीकरण में जैसे एक पक्ष के किसी पद को दूसरे पक्ष में स्थापन करो तो उस के चिन्ह को बदल दो वा जो उस का चिन्ह + हो तो उस के स्थान में − रक्खो और जो

— हो तो धन लिखो इस क्रिया को पक्षान्तरानयन कहते हैं जैसे अय + क = गय — घ, यह एक समीकरण है इस के दोनों पक्षों की तुल्य राशियों में से गय को घटाया तो शेष भी तुल्य बचेंगे ॥ अर्थात्

अय — गय + क = गय — गय + घ

∴ अय — गय + क = घ ∵ गय — गय = ०

इस रीति से = चिन्ह के एक ओर से गय को उसका चिन्ह पलट कर दूसरी ओर स्थापन कर दिया ॥
फिर हर एक पक्ष में से क को घटाया तो

अय — गय + क — क = घ — क

वा अय — गय = घ — क ∵ क — क = ०

अर्थात् क पद को एक पक्ष में से दूसरे पक्ष में उसका चिन्ह पलट कर रख दिया ॥

॥ उदाहरण ॥

य + २ = ६ — य इस समीकरण के एक पक्ष में अक्षर रक्खो और दूसरे पक्ष में अंक, तो — य के स्थान में + य रक्खा और + २ के स्थान में — २ लिक्खा ॥

∴ य + य = ६ — २

(२) ४ य — ६ = ३ य — २ य + १२, इस समीकरण के एक पक्ष में अक्षर रक्खो और दूसरे पक्ष में अङ्क ॥

४ य — ३ य + २ य = १२ + ६

॥ तीसरी रीति ॥

४८ प्र० जो एक समीकरण के प्रत्येक पद को एक ही राशि से गुणा करो तो तो भी समीकरण समता न ही रहेगी

क्योंकि जब हम प्रत्येक पद को एक ही राशि से गुणा करते हैं तो हर एक पक्ष की सम्पूर्ण राशि का उस राशि से बराबर गुणा हो जाता है और इस लिये घात भी तुल्य होते हैं॥

इस रीति से समीकरण में जो भिन्न होते हैं उन के छेद दूर होजाते हैं और इस क्रिया को छेदगम कहते हैं॥

जैसे $७य-६ = \frac{५य}{३}$ इस समीकरण के प्रत्येक पद को ३ से गुणा तो $२१य-१८ = ५य$ क्योंकि $३\times\frac{५य}{३} = ५य$॥

$\frac{य}{२}+५=\frac{य}{३}+६$ इस समीकरण में जो पद भिन्न हैं उनके छेदों को दूर करो, समीकरण के प्रत्येक पद को २ से गुणा तो $य+१० = \frac{२य}{३}+१२$ इस समीकरण में अब एक भिन्न पद रह गया इस लिये उस के प्रत्येक पद को भिन्न पद के हर ३ से गुणा तो $३य+३० = २य+३६$ इस समीकरण में अब कोई पद भिन्न नहीं रहा॥

ऐसे ही जो दो से अधिक भिन्न पद हों तो उन के छेद क्रम से दूर हो सक्ते हैं॥

परन्तु जो भिन्नों के हर बड़े न हों तो उन सब के घात से समीकरण के प्रत्येक पद को गुणा करो॥

जैसे $\frac{य}{२}+५=\frac{य}{३}+६$ यह जो समीकरण लिखा है इस के प्रत्येक पद को २×३ वा ६ से एक बार ही गुणा किया तो $३य+३० = २य+३६$ क्योंकि $६\times\frac{य}{२} = ३य$ और $६\times य ३ = २य$ ऐसे ही जो $\frac{य}{२} - \frac{२य}{३} + \frac{य}{५} = ६$ समीकरण है उस के प्रत्येक पद को $२\times३\times५$ वा ३० से गुणा तो $१५-२०य+६य=१८०$ क्योंकि $३०\times\frac{य}{२} = १५य$ ॥

$३० \times \frac{२य}{३} = २०य$ और $३० \times \frac{य}{५} = ६य$ ॥

परंतु जो प्रत्येक भिन्न पदों के हरों के घात से गुणा करने के स्थान में उन के लघु समावर्त्य अर्थात उस छोटा संख्या से जिस में प्रत्येक हर का निःशेष भाग लग जाय गुणा किया जाय तो सहज पड़ेगा ॥

जैसे $\frac{य}{२} - \frac{य}{४} + \frac{य}{८} = ३$ इस में हरों का घात ६४ है ॥

परंतु उन का लघु समावर्त्य ८ है इस लिये छेदगम के लि समीकरण के प्रत्येक पद को ८ से गुणा ॥ तो

$\therefore ८ \times \frac{य}{२} = ४य, ८ \times \frac{य}{४} = २य, ८ \times \frac{य}{८} = य$ ॥

$\therefore ४य - २य + य = २४$ इस समीकरण में अब हर दूर हो गये ॥

॥ चौथी रीति ॥

४८ प्र० जो समीकरण के प्रत्येक प्रत्येक पद में किसी राशि का भाग दिया जाय तो भी समीकरण की समता बनी रहैगी ॥

क्योंकि जब हम समीकरण के दोनों पक्षों की तुल्य संपूर्ण राशियों के प्रत्येक पद में एक राशि का भाग देते हैं तो उन संपूर्ण राशियों में उस राशि का भाग लग जाता है और इस कारण लब्धि तुल्य होती है ॥

जैसे $४य - २य = १६$ इस समीकरण के प्रत्येक पद में २ का भाग दिया तो $२य - य = ८$

ऐसे ही जो $७य = २८$ इस समीकरण के प्रत्येक पद में ७ का भाग दिया तो $\frac{७य}{७} = \frac{२८}{७}$ वा $य = ४$ ॥

$अय = क$ इस समीकरण के प्रत्येक पद में अ का भाग दिया तो $\frac{अय}{अ} = \frac{क}{अ}$ वा $य = \frac{क}{अ}$ ॥

जब एक वर्ण समीकरण में अव्यक्त राशि का एक घात हो जैसे य, और बड़ा घात न हो जैसे $य^२$, $य^३$ आदि तो ऊपर जो ४ रीति लिखी हैं उन से एक घात

योग करने से   य = १२ ∴ ३य — २य = १य वा य

य का १२ मान शुद्ध है क्योंकि $\frac{१२}{२}$ − ५ = ६ − ५ = १

और $\frac{१२}{३}$ − ३ = ४ − ३ = १॥

(३) $\frac{य - ६}{२} + ६ = \frac{५य - ६}{२}$, तो य का मान बताओ

२ से गुणा किया तो य − ६ + १२ = ५य − ६

— ६ मिटा दिया तो   य + १२ = ५य

पक्षांतरानयन से   १२ = ५य − य

योग करने से   १२ = ४य

४ का भाग देने से   ३ = य वा य = ३

(४) $\frac{य}{२} - \frac{५य}{३} - \frac{४}{३} = \frac{४य}{३} - ३$ तो य का मान बताओ॥

२ × ३ वा ६ से गुणा किया तो ३य — १०य — ८ = ८य — १८

पक्षांतरानयन से ३य — १०य — ८य = ८ — १८

योग करने से   — १५य = — १०

— १५ का भाग देने से   य = $\frac{-१०}{-१५} = \frac{२}{३}$

(५) $\frac{य}{३} - \frac{य}{२} + \frac{य}{५} = \frac{१}{२}$ तो य का मान निकालो

२ × ३ × ५ वा ३० से गुणा किया तो ∴ ३० × $\frac{य}{३}$ = १०य

३० × $\frac{य}{२}$ = १५य, ३० × $\frac{य}{५}$ = ६य और ३० × $\frac{१}{२}$ = १५

∴ १०य − १५य + ६य = १५

योग करने से   य = १५

(६) $\frac{४य}{३} - \frac{२य}{१०} + \frac{य}{६} = ३९$ तो य का मान बताओ

३, १० और ६ इनका लघुतम समावर्त्य ३० है॥

इसलिये हरों के दूर करने के लिये समीकरण के प्रत्येक पद को ३० से गुणा ॥ तो

$$\therefore ३० \times \frac{४य}{३} = १० \times ४य = ४०य$$

$३० \times \left(-\frac{३य}{१०}\right) = -६य$, $३० \times \frac{य}{६} = ५य$ और $३० \times ३९ = ११७०$

$$\therefore ४०य - ६य + ५य = ११७०$$

योग करने से $३९य = ११७०$

३९ का भाग देने से $य = \frac{११७०}{३९} = ३०$

॥ अभ्यास के लिये उदाहरण ॥

नीचे जो समीकरण लिखे हैं उन में य का मान बताओ॥

(१) $६य - १० = ५य - ४$ ॥

(२) $१३य + १ = ९य + ५$ ॥

(३) $३य + ३० = २ + ३६$ ॥

(४) $४य - २य = २४ - य$ ॥

(५) $७य - ११ + ५ = ८य - ९$ ॥

(६) $१५ - २य + ६ = ३य + १$ ॥

(७) $९य - ६ = ११ - ४य - ४$ ॥

(८) $१२ - ८य = १५ - ३य - ८$ ॥

(९) $१२१ = १४य + १ - ३य + २०$ ॥

(१०) $५०० = ३०य + १२ + ३२य - ८$ ॥

(११) $७य - २य + ५ = १३य - ४य - २५$ ॥

(१२) $१२य - ६य + ४य = ३य + ८४$ ॥

(१३) $२य + \frac{१}{२} = ३य - \frac{१}{२}$ ॥

(१४) $१५य - ३\frac{१}{२} = ३\frac{१}{२} + य$ ॥

(१५) $य + \frac{य}{२} = ६$ ॥

(१६) $२य - \frac{य}{२} = १८$ ॥

(१७) $३य + \frac{य}{२} = ४य - ६$ ॥

(१८) $\frac{४य}{३} + \frac{२}{३} = य + ३$ ॥

(१९) $\frac{३य}{५} - \frac{य}{५} = य - ६$ ॥

(२०) $\frac{य}{३} + \frac{य}{६} = १५$ ॥

(२१) $\frac{य}{५} - \frac{य}{१०} = \frac{१}{२}$ ॥

(२२) $य - \frac{य}{२} + \frac{य}{३} - \frac{२}{३} = २\frac{१}{२}$ ॥

(२३) $\frac{२य}{७} + \frac{य}{६} - \frac{१}{६} = य - ४$ ॥

(२४) $\frac{३य}{७} - १ = \frac{य}{५} + \frac{३}{५}$ ॥

(२५) $\frac{य}{२} - \frac{य}{३} - \frac{य}{४} + \frac{७}{३} = \frac{३}{४}$ ॥

(२६) $\frac{३य}{२} - \frac{२य}{२} + \frac{१}{२} = \frac{य}{६} + ५\frac{५}{६}$ ॥

(२७) $\frac{य}{५} + \frac{य}{४} + \frac{य}{३} - \frac{य}{२} = ७$ ॥

(२८) $य - \frac{य}{६} - \frac{य}{१०} - \frac{य}{७} = \frac{य}{२} + ९$ ॥

(२९) $\frac{३य}{१४} - \frac{२य}{२१} + \frac{१}{२} = \frac{य}{४} - ४\frac{१}{६}$ ॥

(३०) $\frac{३य}{७} - \frac{य}{४} - \frac{य}{६} = \frac{५}{२१} - \frac{३}{२८}$ ॥

(३१) $२य - \frac{२य}{५} - १\frac{२}{५} - \frac{४य}{११} = \frac{८य}{७} - १\frac{६}{११}$ ॥

(३२) $\frac{य}{८} + \frac{२य}{५} = \frac{७य}{१५} - \frac{य}{६०} + \frac{३}{२०}$ ॥

(३३) $\frac{७य}{८} - \frac{३य}{७} + १\frac{२}{८} = \frac{९य}{४} + \frac{९य}{१४} - २०\frac{२५}{२८}$ ॥

(३४) $\frac{३य}{१६} + \frac{७य}{१५} - \frac{७य}{२०} = २\frac{२९}{६०} - \frac{३}{१६}$ ॥

(३५) $\frac{१४य}{३} - \frac{८य}{५} = १०\frac{१}{२} + \frac{२य}{१\frac{१}{२}} - ३\frac{२}{५}$ ॥

(३६) $\frac{य}{४} - ४\frac{१}{२} + \frac{य}{५\frac{१}{२}} + \frac{य}{२} = \frac{१६\frac{१}{४}}{५\frac{१}{२}}$ ॥

५१ प्र॰ जो समीकरण में कोष्ठ वा शृंखल आवें तो वे ४४ प्रकार की रीतियों से दूर हो सक्ते हैं॥

॥उदाहरण॥

(१) २(य+५)+३(२य−७) = २१ तो य का मान बताओ॥

पहिले कोष्ठ का यह अर्थ है कि य+५, २ गुणा है और दूसरे कोष्ठ से मालूम होता है कि ३ गुणा २य−७ को जोड़ना है इसलिये गुणा करने के पीछे कोष्ठों को मिटा दिया॥ तो

∴ २(य+५) = २य+१० और ३(२य−७) = ६य−२१ ॥

∴ २य+१०+६य−२१ = २१ ॥

पक्षान्तरानयन से $२य + ६य = २१ + २१ - १०$

योग करने से $८य = ३२$

८ का भाग देने से $य = \frac{३२}{८} = ४$ ॥

(२) $२(य+५) - ३(२य-७) = १५$ तो य का मान निकालो

$\therefore २(य+५) = २य + १०$ और $३(२य-७) = ६य - २१$ ॥

$\therefore २य + १० - (६य - २१) = १५$

वा ४४ प्रक्रम से $२य + १० - ६य + २१ = १५$ ॥

पक्षान्तरानयन से $२य - ६य = १५ - १० - २१$

योग करने से $-४य = -१६$ ॥

-४ का भाग देने से $य = \frac{-१६}{-४} = ४$

(३) $५ - \frac{य+४}{११} = य - ३$ य का मान कहो ॥

यह तो हम लिख ही चुके हैं कि जो रेखा भिन्न के अंश और हर के बीच में खिंची रहती है वह दोनों अंश और हर का शृंखल होती है समीकरण के प्रत्येक पद को ११ से गुणा करो ॥

$५५ - (य+४) = ११य - ३३$ तो ४४ प्रक्रम से

वा $५५ - य - ४ = ११य - ३३$

पक्षान्तरानयन से $५५ - ४ + ३३ = ११य + य$

योग करने से $८४ = १२य$

१२ का भाग देने से $य = \frac{८४}{१२} = ७$

(४) $य + \frac{३य-५}{२} = १२ - \frac{२य-४}{३}$ तो य का मान बताओ ॥

छेदगम के लिये प्रत्येक पद को २×३ बा ६ से गुणा किया तो

$६य + ३(३य - ५) = ७२ - २(२य - ४)$

वा $६य + (९य - १५) = ७२ - (४य - ८)$

४४ प्रक्रम से $६य + ९य - १५ = ७२ - ४य + ८$

पक्षान्तरानयन से $६य + ९य + ४य = ७२ + ८ + १५$

योग करने से $१९य = ९५$

१९ का भाग देने से $य = \frac{९५}{१९} = ५$ ॥

(५) $\frac{८ - ७य}{८} + \frac{१२ + ९य}{१६} = \frac{१ - ३य}{१०} - \frac{२९ + ८य}{२०}$ तो य का मान बताओ, हरों का लघुतम समापवर्त्य ८० है इसलिये प्रत्येक पद को ८० से गुणा किया तो

$१०(८ - ७य) + ५(१२ + ९य) = ८(१ - ३य) - ४(२९ + ८य)$ वा $(८० - ७०य) + ६० + ४५य = ८ - २४य - ११६ - ३२य$

पक्षान्तरानयन से $२४य + ३२य - ७०य + ४५य = ८ - ११६ - ६० - ८०$

योग करने से $३१य = -२४८$

३१ का भाग देने से $य = \frac{-२४८}{३१} = -८$

(६) $\frac{१}{१४}\left(३य + \frac{२}{३}\right) - \frac{१}{७}\left(४य - ६\frac{२}{३}\right) = \frac{१}{२}(५य - ६)$ तो य का मान बताओ, १४ से गुणा करने से $३य + \frac{२}{३} - २\left(४य - ६\frac{२}{३}\right) = ७(५य - ६)$ वा $३य + \frac{२}{३} - \left(८य - १२\frac{४}{३}\right) = ३५य - ४२$ ॥

$\therefore ३य + \frac{२}{३} - ८य + १२\frac{४}{३} = ३५य - ४२$

पक्षान्तरानयन से $४२ + \frac{२}{३} + १२ + \frac{४}{३} = ३५य + ८य - ३य$

योग करने से $५६ = ४०य$

$\therefore$ ४० का भाग देने से $य = \frac{५६}{४०} = १\frac{२}{५}$

॥ अभ्यास के लिये उदाहरण ॥

नीचे जो समीकरण लिखे हैं उन में य का मान बताओ

(१) $६य+२(११-य)=३(१९-य)$ ॥

(२) $३(य+१)+२(य+२)=३२$ ॥

(३) $३य-२(५य+४)=२(४य-९)$ ॥

(४) $५(२य-२)-३(२य+१)=२७$ ॥

(५) $६(३-२य)=२४-५(४य-५)$ ॥

(६) $४५-४(य-२)=५(य+२)$ ॥

(७) $७य=८-\frac{१-९य}{२}$ ॥

(८) $\frac{२य}{७}+४=य-\frac{य-१}{६}$ ॥

(९) $\frac{३य+१}{२}-\frac{य-१}{६}=\frac{२य}{३}+१०$ ॥

(१०) $\frac{१}{४}(य+६)-\frac{१}{१२}(२६-२य)=४\frac{१}{६}$

(११) $\frac{१}{१६}(३य+३)+\frac{१}{२५}(७य-४)-\frac{१}{२०}(७य+१)=२$

(१२) $१०(य+\frac{१}{२})-६य(\frac{१}{य}-\frac{१}{३})=२३$ ॥

(५२) प्र० बहुधा समीकरण में भिन्न पदों के हर में अव्यक्त राशि रहती है परन्तु उस का मान पूर्वरीतियों से मिल जाता है प्रथम जो हर जिन में अव्यक्त राशि होवे केवल एक पद के हों ॥ जैसे

॥ उदाहरण ॥

(१) $\frac{९}{२य}-४=५$ तो य का मान बताओ ॥

पक्षांतरनयन से $\frac{९}{२य}=५+४$

योग करने से $\frac{९}{२य} = ९$

२य से गुणा किया तो $९ = १८ य$

१८ का भाग देने से $य = \frac{९}{१८} = \frac{१}{२}$

(२) $\frac{२}{य} + \frac{४}{य} = \frac{३}{य} + \frac{५}{य} - \frac{२}{२७}$ तो य का मान बताओ

क्योंकि चारों भिन्नों में य समच्छेद है॥

योग करने से $\frac{६}{य} = \frac{८}{य} - \frac{२}{२७}$

पक्षांतरानयन से $\frac{८}{य} - \frac{६}{य} = \frac{२}{२७}$

योग करने से $\frac{२}{य} = \frac{२}{२७}$

$\therefore य = २७$

दूसरे समीकरण के जिन पदों के हर में अमल राशि हों वे दो वा अधिक बा पद के हों तो प्रथम जो एक पद के हर हों उन्हें दूर करो फिर शोधन पक्षांतरानयन और योग करने से समीकरण में थोड़े पद रह जांय तब क्रम से बहुपदों के हरों को दूर करो और जो एक पद के हर न हों तो बहुपद के हरों को एक एक लेकर दूर करो॥

॥उदाहरण॥

$\frac{६य+१३}{२५} - \frac{३य+५}{५य-२५} = \frac{२य}{५}$ तो य का मान बताओ

प्रथम एक पद के हरों को दूर करने के लिये २५ से गुणा किया॥

$६य+१३ - \frac{२५(३य+५)}{५य-२५} = ६य ... २५ \times \frac{२य}{५} = ...$

अंश और हर दोनों में ५ का भाग देने से $१३ = \frac{३(३य+५)}{य-५}$

$य-५$ से गुणा करने से $१३य - ६५ = ९य + १५$

पक्षांतरानयन से $१३य - ९य = ६५ + १५$

योग करने से $४य = ८०$

४ का भाग देने से $य = \frac{८०}{४} = २०$

(२) $\frac{१०य+१७}{१८} - \frac{१२य+२}{११य-८} = \frac{५य-४}{९}$ तो य का मान बताओ॥

१८ और ९ हरों के दूर करने के लिये १८ से गुणा किया तो

$$१०य + १७ - \frac{२१६य+३६}{११य-८} = १०य - ८$$

शोधन और पक्षांतरानयन से $१७ + ८ = \frac{२१६य+३६}{११य-८}$

योग करने से $२५ = \frac{२१६य+३६}{११य-८}$

$११य - ८$ से गुणा किया $२५(११य-८) = २१६य + ३६$

वा $२७५य - २०० = २१६य + ३६$

पक्षांतरानयन से $२७५य - २१६य = २०० + ३६$

योग करने से $५९य = २३६$

५९ का भाग देने से $य = \frac{२३६}{५९} = ४$

(३) $\frac{१}{य-२} - \frac{२}{य+७} = \frac{१}{७(य-२)}$ इस में य का मान बताओ॥

$७(य-२)$ से गुणा करने से $७ - \frac{१४(य-२)}{य+७} = १$ ∵

$७(य-२) \times \frac{१}{७(य-२)} = १$

पक्षांतरानयन से और योग करने से $६ = \frac{१४(य-२)}{य+७}$

$य+७$ से गुणा किया तो $६य + ४२ = १४य - २८$

पक्षांतरानयन से $१४य - ६य = ४२ + २८$

योग करने से ८य = ५६

८ का भाग देने से य = $\frac{५६}{८}$ = ७

(४) $\frac{२(३-४य)}{३-य} + \frac{३}{२-य} = ८$ य का मान बताओ

३−य से गुणा किया तो $२(३-४य) + \frac{९-३य}{२-य} =$ २४−८य

वा $६-८य + \frac{९-३य}{२-य} = २४-८य$

शोधन और पक्षांतरानयन से $\frac{९-३य}{२-य} = २४-६ = १८$

२−य से गुणा किया तो ९−३य = १८−१८य

पक्षांतरानयन से १८य − ३य = १८ − ९

योग करने से १५य = ९

१५ का भाग देने से य = $\frac{९}{१५} = \frac{३}{५}$ ॥

(५) $\frac{१५+३य}{य+१} + \frac{३०+४य}{य+३} = ७ + \frac{२४}{य+१}$ इसमें य का मान बताओ॥

य+१ से गुणा किया तो १५+३य+ $\frac{३०य+४य^२+३०+४य}{य+३}$ = ७य+७+२४

पक्षांतरानयन और योग करने से $\frac{३४य+४य^२+३०}{य+३}$ = ४य+१६

य+३ से गुणा किया तो ३४य+४य² + ३० = ४य²+१६य+१२य+४८

शोधन और पक्षांतरानयन से ३४य − १६य − १२य = ४८ − ३०

योग करने से ६य = १८

६ का भाग देने से य = $\frac{१८}{६}$ = ३

॥ अभ्यास के लिये उदाहरण ॥

॥ नीचे जो समीकरण लिखे हैं उन में य का मान निकालो ॥

(१) $\frac{२}{३य} + \frac{३}{२य} = १३$ ॥

(२) $\frac{४}{५य} + \frac{५}{४य} = ४१$ ॥

(३) $\frac{अ}{कय} + \frac{क}{अय} = अ^{२} + क^{२}$ ॥

(४) $\frac{६य-४}{२१} + \frac{य-२}{५य-६} = \frac{२य}{७}$ ॥

(५) $\frac{८य-१६}{३६} = \frac{१३-४य}{४-५य} + \frac{य-४}{४}$ ॥

(६) $\frac{७य+१६}{२१} - \frac{य+८}{४य-११} = \frac{य}{३}$ ॥

(७) $\frac{य-७}{य+७} + \frac{१}{२(य+७)} = \frac{२य-१५}{२य-८}$ ॥

(८) $\frac{३}{य} - \frac{२}{य+१} = \frac{५}{४(य+२)}$ ॥

(९) $\frac{१०}{६य+१७} - \frac{१०}{३य-१०} = \frac{१}{१-२य}$ ॥

(१०) $\frac{६य+८}{२य+१} - \frac{२य+३८}{य+१२} - १ = ०$ ॥

५३ सू० समीकरण में जो बड़े अंक बहुत हों तो उन को इस रीति से लिखो कि सब अंक जिन के एक से चिन्ह होवें एक दूसरे के नीचे रहैं ॥

॥ उदाहरण ॥

(१) $७०य - ४२य + ४२ + २८० = ७०० - ३५य$
$= ६०य + ८० + ५६य$

पक्षांतरानयनसे ७०य	— ४२य	= ७००	— ५६
३५य	— ५६य	८०	— ४२
६०य			— २८०

योग करनेसे १६५ } य = ७८०
— ९८ — ३७८

६७य = ४०२

∴ य = ४०२/६७ = ६

(२) (९य — १३)/४ — (२४९ — ९य)/१४ = (७य + ९)/८ — (३य + १)/७ इसमें य का मान बताओ ॥

हरों का ५६ लघुतम समापवर्त्य है इसकारण ५६ से गुणा किया तो

१२६य — १८२ — ९९६ — ३६य = ४९य + ६३ — २४य + ८

वा १२६य — १८२ — ९९६ + ३६य = ४९य + ६३ — २४य — ८

पक्षांतरानयनसे
१२६ } ६३ }
३६ } य — ४९य = १८२ } — ८
२४ } ९९६ }

योग करनेसे १८६ } य = १२४१
— ४९ } — ८

१३७य = १२३३

∴ य = १२३३/१३७ = ९

(३) २०१(य−१)+२५(३य+१)+२२(५य+१)=४५(य+१०)+२१(य+११)−३५ इसमें य का मान बताओ ॥

उत्तर य = २ $\frac{१}{२}$ ॥

॥ प्रश्न ॥

जिनका उत्तर एक घात एक वर्ण समीकरण के द्वारा से निकल आता है ॥

५४ प्र० ध्यक्रम जो हम लिख चुके हैं उनके जानने से बहुतेरे प्रश्न जिनके उत्तर अंक गणित से नहीं निकल सक्ते हैं सहज में होजाते हैं और अङ्क गणित में जैसी रीति लिखी होती है कि उनके अनुसार क्रिया करने से प्रश्न का उत्तर निकल आताहै वैसी रीति बीज गणित में नहीं लिखते और केवल अभ्यास ही से विद्यार्थी प्रश्न को समीकरण के स्वरूप में लिख सक्ताहै परन्तु प्रश्न को अच्छी रीति से समझ के इतना अवश्य देख लेना चाहिये कि प्रश्न में कौनसी राशि व्यक्त वा दृश्य हैं और कौनसी अव्यक्त वा दृष्ट हैं फिर अव्यक्त राशि के स्थान में य लिखकर व्यक्त राशियों को धरो और प्रश्न से एक ऐसा समीकरण बनालो जिसमें प्रश्न की सब बातें पाई जांय ॥

॥ प्रश्न ॥

(१) ३ लड़कों की अवस्था मिलकर २४ वर्ष की है और उनके जन्म दिन में दो दो वर्ष का अन्तर है तो बतलाओ कि हर एक लड़के की अवस्था क्या होगी ॥

अब इस प्रश्न में देखो कि व्यक्त राशि कौनसी है और अव्यक्त कौनसी ॥

॥ व्यक्त राशि ॥

(१) तीनों लड़कों की अवस्था का योग २४ वर्ष है ॥
(२) और प्रत्येक दो लड़कों की अवस्था में २ वर्ष का अन्तर है

॥ अव्यक्त राशि ॥

(१) बड़े लड़के की अवस्था बताओ ॥
(२) मझले लड़के की अवस्था बताओ ॥
(३) छोटे लड़के की अवस्था बताओ ॥

परन्तु सच पूछो तो केवल एक ही राशि अज्ञात है क्यों कि जो एक लड़के की अवस्था मालूम हो जाय तो शेष दो लड़कों की अवस्था भी मालूम हो जायगी इसकारण कल्पना करो कि छोटे लड़के की अवस्था य है ॥

तो य + २ मझले लड़के की अवस्था होगी ॥
और य + ४ बड़े लड़के की अवस्था होगी ॥

प्रश्न की एक बात का तो बीजात्मक रूप कर लिया अब दूसरी बात रह गई है वह यह है कि तीनों लड़कों की अवस्था का योग २४ वर्ष है वा य, य + २ और य + ४ अर्थात् ३ य + ६, २४ वर्ष के तुल्य है इसका समीकरण बनाया तो ३ य + ६ = २४ इसमें य का मान बताओ ॥

पक्षान्तरानयन से ३ य = २४ − ६ = १८

३ का भाग देने से य = $\frac{१८}{३}$ = ६

∴ छोटे लड़के की अवस्था ६ वर्ष की है ॥
मझले लड़के की अवस्था ८ वर्ष की है ॥
और बड़े लड़के की अवस्था १० वर्ष की है ॥

(२) मेरे पास जितनी मुहर हैं उनसे पाँचगुने रुपये हैं

और सर्व धन १४७) है तो बतलाओ मेरे पास कित
नी मुहर हैं और कितने रुपये ॥

कल्पना करो कि य मुहर हैं
तो ५य रुपये होंगे ॥

और मेरे पास १६) की एक २ मुहर है तो य गुणा
१६) या १६ य रुपये मुहरों के हुए ॥

∴ १६ य + ५ य = सर्व धन परंतु सर्व धन = १४७)

∴ २१ य = १४७

२१ का भाग देने से य = $\frac{१४७}{२१}$ = ७ मुहर

और ५य = ५×७ = ३५ रुपये

(३) मैं २४ कोडी और ७ रुपये की हुंडी साहूकार में
पटाने को गया और मैंने गुमास्ते के हाथ में हुंडी देकर
उस्से कहा कि तुम मुझे इस हुंडी के दाम में मुहर रुपये
अठन्नी चोअन्नी दोअन्नी और एकअन्नी बराबर दो तो वह
सुनते ही चुपका हो रहा तो बतलाओ कि उसको कि
तनी मुहर आदि देनी चाहिये ॥

कल्पना करो कि य इष्ट संख्या है ॥
तो य मुहरों के य गुणा १६ या १६ रुपये होंगे ॥

य रुपये के य रुपये होंगे

य अठन्नीयों के $\frac{य}{२}$ रुपये होंगे

य चौअन्नियों के $\frac{य}{४}$ रुपये होंगे

य दोअन्नियों के $\frac{य}{८}$ रुपये होंगे

य एक अन्नियों के $\frac{य}{१६}$ रुपये होंगे

और १५ कौड़ी ७ रुपयों के २८७ रुपये होंगे

प्रश्न के अनुसार $१६य + य + \frac{य}{२} + \frac{य}{४} + \frac{य}{८} + \frac{य}{१६} = २८७$

१६ से गुणा करने से $२५६य + १६य + ८य + ४य + २य + य = ४५९२$

योग करने से $२८७य = ४५९२$

२८७ का भाग देने से $य = १६$

॥ उत्तर का आलाप ॥

१६	मुहर	=	२५६)
१६	रुपये	=	१६)
१६	अठन्नी	=	८)
१६	चौअन्नी	=	४)
१६	दोअन्नी	=	२)
१६	एकअन्नी	=	१)

जोड़ २८७)

(४ मेरे पास जो आम थे उन में से मैं ने तिहाई के आम मोहन को दिये और छठे भाग के आम रूपा को दिये और यह सब मिलाकर १५ भये तो बतलाओ कि मेरे पास सब कितने आम थे ॥

कल्पना करो कि य आमों की संख्या है ॥

तो $\frac{य}{३}$ यह संख्या मोहन को जो आम दिये उन की हुई और $\frac{य}{६}$ यह संख्या रूपा के आमों की हुई और प्रश्न के अनुसार ये सब आम मिलाके १५ हैं ॥

अर्थात $\frac{य}{३} + \frac{य}{६} = १५$

६ से गुणा करने से $२य + य = ९०$

योग करने से $३य = ९०$

३ का भाग देने से $य = \frac{९०}{३} = ३०$ पेड़ पास सब दूने आम थे ॥

$\therefore \frac{३०}{३} = १०$ और $\frac{३०}{६} = ५$ और $१० + ५ = १५$

(५) एक बाग़ में आम के पेड़ जामन के पेड़ों से तिगुने लगे थे परन्तु जब ४ पेड़ आम के और ४ पेड़ जामन के काट डाले तो आम के पेड़ जामन के पेड़ों से ४ गुने हो गये तो बतलाओ कि आम और जामन के कितने कितने पेड़ थे ॥

कल्पना करो कि य जामन के पेड़ों की संख्या है ॥

तो ३य आमों के पेड़ों की संख्या होगी ॥

और य — ४ यह जामन के पेड़ों की संख्या ४ पेड़ काटे पीछे रह गई

ऐसे ही ३य — ४ यह आमों के पेड़ों की संख्या ४ पेड़ काटे पीछे रह गई ॥

इसलिये प्रश्न के अनुसार $३य - ४ = ४(य - ४)$

वा $३य - ४ = ४य - १६$

पक्षान्तरानयन से $१६ - ४ = ४य - ३य$

योग करने से $१२ = य$

इसलिये प्रथम बाग़ में १२ जामन के पेड़ थे और ३ गुने १२ वा ३६ आम के पेड़ ॥

(६) एक राजा की राजगद्दी का संवत $१९०० - २य$ है और उसके पीछे दूसरे राजा की राजगद्दी का संवत $१९०० + \frac{१}{२} \times २य$ है और तीसरे राजा की राजगद्दी का संवत $१९०० + \frac{१}{३} \times ३य$ है और जो पहिले राजा के राज्य के वर्षों में २य जोड़ दें तो योग २०० वर्ष के तु

स्त हो जाता है तो बतलाओ कि किस किस संवत् में हर एक राजा गद्दी पर बैठा

पहिले और दूसरे राजाओं की राजगद्दी के संवतों का अन्तर निकालने से पहिले राजा के राज्य के वर्ष $= १८०० + \frac{१}{२} \times २य - (१८०० - २य) =$

१८०० + य − १८०० + २य

= ३य

प्रश्न के अनुसार ३य + २य = २००

वा ५य = २००

∴ य = $\frac{२००}{५}$ = ४०॥

∴ पहिले राजा की राजगद्दी का संवत् १८०० − ४० वा १७६० है दूसरे राजा की राजगद्दी का संवत् १८०० + २० वा १८२० है तीसरे राजा की राजगद्दी का संवत् १८०० + ३० वा १८३० है॥

(७) ४२ गन्नों को ४ आदमियों में इस रीत से बांट दो कि पहिले आदमी को जितने गन्ने दो उनसे एक अधिक दूसरे आदमी को दो और ऐसे ही तीसरे और चौथे मनुष्य को एक एक गन्ना अधिक दो॥

कल्पना करो कि पहिले मनुष्य को जो गन्ने दिये जांय उनकी य संख्या है तो शेष तीन मनुष्यों के गन्नों की य + १, ॥ य + २ और य + ३ ये संख्या होंगी॥

प्रश्न के अनुसार य + य + १ + य + २ + य + ३ = ४२

योग करने से ४य + ६ = ४२

पक्षांतरानयन से ४य = ४२

योग करने से ४य = ३६

कोस एक घंटे में चल जाता और परसराम ऐसी धीम ता से चलता था कि वह १ कोस २ घंटे में पहुंच जाता तो बतलाओ कि वे दोनों मनुष्य कितनी २ दूर चलकर मिल जांयगे और जो वे बराबर चलकर ठीक बीच राह में मिला चाहें तो सीताराम को परसराम से कितनी देर पीछे चलना चाहिये ॥

प्रथम कल्पना करो कि सीताराम य कोस चलकर परसराम से मिल जाय तो ४ १/२ — य कोस परसराम चला होगा ॥

अब त्रैराशिक से जितना २ समय हर एक को चलने में लगा उसे निकालते हैं ॥

कोस		कोस		घंटा		घंटा	
२ १/२	:	य	::	१	:	$\frac{२य}{५}$	इतना समय सीताराम को य कोस चलने में लगा
कोस		कोस		घंटा		घंटा	
१	:	४ १/२ — य	::	२	:	४ १/२ — य	इतना समय परसराम को ४ १/२ — य कोस चलने में लगा

और दोनों मनुष्य बराबर समय तक चले ॥

इस कारण $\frac{२य}{५} = \frac{४ १/२ — य}{२}$ इसके दोनों पक्षों को ५ २ वा १० से गुणा किया तो ४ य = २२ १/२ — ५ य, पक्षांतरानयन से ९ य = २२ १/२

९ का भाग देने से य = $\frac{२२ १/२}{९}$ = २ १/२ इतने कोस सीताराम चला और ४ १/२ — २ १/२ वा २ कोस परे परसराम अपने गाँव से चलकर सीताराम को मिला और वहां से सीताराम का गाँव २ १/२ कोस रह गया दूसरे जो दोनों मनुष्य ठीक बीच राह में मिला चाहें तो उनको आधी २ राह चलने में जितना २ समय उनकी शीघ्रता के अनुसार लगेगा उसे

त्रैराशिक से निकालते हैं ॥

$४\frac{१}{२}$ कोस का आधा $२\frac{१}{४}$ कोस है

कोस	कोस	घंटा	घंटा
$२\frac{१}{२}$:	$२\frac{१}{४}$	:: १	$\frac{२\frac{१}{४}\times२}{५}$ इतना समय-

सीताराम को $२\frac{१}{४}$ कोस चलने में लगेगा ॥

ऐसे ही २ कोस : $२\frac{१}{४}$ कोस :: १ घंटा : $\frac{२\frac{१}{४}}{२}$ इतना समय परसराम को $२\frac{१}{४}$ कोस चलने में लगेगा ॥

अब देखना चाहिये कि किस मनुष्य को कितना समय अधिक लगेगा इसलिये $२\frac{१}{४}$ कोस चलने में जितना समय दोनों मनुष्यों का लगा उनका अंतर निकालो और जानो कि $२\frac{१}{२}$ घड़ी = १ घंटा और ६० पल = १ घड़ी

$\frac{२\frac{१}{४}}{२} - \frac{२\frac{१}{४}\times२}{५} = २\frac{१}{४}\left(\frac{१}{२} - \frac{२}{५}\right) = २\frac{१}{४}\times\frac{१}{१०}$

$= \frac{९}{४०}$ घंटा $= \frac{९}{४०}\times२\frac{१}{२}$ घड़ी $= \frac{९}{१६}$ घड़ी $= \frac{९}{१६}\times$ ६० पल $= ३३\frac{३}{४}$ पल इतना पहिले परसराम अपने गाँव से चलेगा औ इतने ही समय पीछे सीताराम अपने गाँव से चलेगा ॥

(१९) एक बनिये के पास दो भाव की मैदा है एक ७ आने पनसेरी और दूसरी ६ आने पनसेरी तो इन में से कितनी कितनी मैदा मिलावें जिस से ६ आने ८ पाई पनसेरी के भाव की हो जाय ॥

कल्पना करो कि ७ आने के भाव की य पनसेरी मेवा लें तो इसके ७य आने दाम होंगे और जो ६ आने के भाव की १ पनसेरी मेवा लें तो एक पनसेरी के दाम ६ आने होंगे इसलिये दोनों भाव की (य + १) पनसेरी के दाम (७य+६) आने दाम हुए परन्तु हम दोनों भाव की मेवा मिलाके ६ आने ८ पाई पनसेरी का भाव किया चाहते हैं इसलिये इस भाव से (य+१) पनसेरी के दाम (य+१) गुणा ६ आने ८ पाई अर्थात् (य+१) ६ $\frac{२}{३}$ आने हुए॥ क्योंकि ८ पाई $= \frac{८}{१२}$ आना $= \frac{२}{३}$ आना॥

$$\therefore ७य+६ = (य+१) \times ६\frac{२}{३}$$

$$= ६य + \frac{२}{३}य + ६\frac{२}{३} \quad \because ६\frac{२}{३} = ६ + \frac{२}{३}$$

पक्षांतरानयन से $७य - ६य - \frac{२}{३}य = ६\frac{२}{३} - ६$

योग करने से $\frac{१}{३}य = \frac{२}{३} = \frac{१}{३} \times २$

$$\therefore य = २$$

इस कारण ७ आने के भाव की २ पनसेरी मेवा और ६ आने के भाव की १ पनसेरी मेवा दोनों मिलाई जाय तो मिली हुई मेवा के ६ आने ८ पाई पनसेरी के दाम होंगे॥

(३) एक खेत के नाज को एक आदमी ५ दिन में काट लेता है और वैसे ही दूसरे खेत के नाज को एक लड़का ७ दिन में काट लेता है जो आदमी और लड़का दोनों मिल कर एक खेत के नाज को काटें तो वे कितने दिन में खेत नाज को काट लेंगे॥

कल्पना करो कि वे दोनों य दिन में काट लेंगे और आदमी

सब नाज को अकेला ५ दिन में काट लेता है ॥

इसलिये वह एक दिन में सब नाज का $\frac{१}{५}$ भाग काट लेगा ऐसे ही लड़का अकेला एक दिन में सब नाज का $\frac{१}{७}$ भाग काट लेगा इस कारण लड़का और आदमी दोनों मिल कर एक दिन में सब नाज का $\left(\frac{१}{५}+\frac{१}{७}\right)$ वा $\frac{१२}{३५}$ भाग काट लेंगे परंतु आदमी और लड़का दोनों य दिन में सब नाज को काट लेंगे इसलिये वे एक दिन में सब नाज का $\frac{१}{य}$ भाग काटेंगे

$\therefore \frac{१२}{३५} = \frac{१}{य}$ वा य $= \frac{३५}{१२} = २\frac{११}{१२}$ दिन यही उत्तर हुआ ॥

(२३) विक्टोरिया नाम इंग्लिस्तान की महारानी का जन्म २४ मई सन् य को हुआ और एक बड़े राजकुमार का जन्म २६ अगस्त सन् य+१ को हुआ और उसका विवाह १० फ़रवरी सन् १८४० ई० को हुआ और २६ अगस्त सन् १८४८ को दोनों महारानी और राजकुमार की अवस्थाओं का योग राजकुमार की अवस्था जो विवाह के पहिले थी उससे तीन गुना मालूम हुआ तो बतलाओ कि दोनों का किस वर्ष में जन्म हुआ ॥

प्रश्न के अनुसार उन दोनों के जन्म वर्ष य+१ हैं तो २६ अगस्त सन् १८४८ को ॥

१८४८ — य = महारानी की अवस्था, क्योंकि जिस संवत् तक की अवस्था निकालनी हो उस संवत् में से जन्म के संवत् को घटाओ तो अंतर अवस्था के तुल्य होगा ॥

और १८४८ — (य+१) = राजकुमार की अवस्था ॥

और विवाह के आगे राजकुमार की अवस्था = १८३९ − (य + २)

॥इसलिये प्रश्न के अनुसार॥

१८४८ − य + १८४८ − (य + २) = ३{१८३९ − (य + २)}

वा १८४८ − य + १८४८ − य − २ = ५५१७ − ३य − ३

पक्षांतरानयन से ३य − २य = ५५१७ − ३ + २ − १८४८ − १८४८

∴ योग करने से य = $\frac{५५२८}{-३६९६}$ = १८२९ यह महारानी का और य + १ = १८२९ + १ = १८३० यह राजकुमार का जन्म वर्ष हुआ ॥

(१५) एक हौज़ में ३ ऐसी मोरी लगी हैं कि उन में से जो एक मोरी की राह हो कर पानी आवे तो हौज़ ५ घड़ी में भर जाता है और जो दूसरी मोरी की राह हो कर पानी आवे तो हौज़ ६ घड़ी में भर जाता है और जो तीसरी मोरी में हो कर पानी आवे तो हौज़ १० घड़ी में भर जाता है बतलाओ कि जो एक साथ तीनों मोरियों में होकर पानी आवे तो हौज़ कितनी घड़ी में भर जायगा ॥

कल्पना करो कि य, इष्ट घड़ी हैं ॥

पहिली मोरी की राह से ५ घड़ी में सब पानी भर जाता है इसलिये एक घड़ी में उसी मोरी की राह सब पानी का $\frac{१}{५}$ भाग हौज़ में भर जायगा और दूसरी मोरी की राह से ६ घड़ी में सब पानी भर जाता है इसलिये १ घड़ी में उसी मोरी की राह सब पानी का $\frac{१}{६}$ हौज़ में भर जायगा ऐसे ही तीसरी मोरी की राह से १ घड़ी में सब पानी का $\frac{१}{१०}$ भाग हौज़ में भ

र जायगा॥

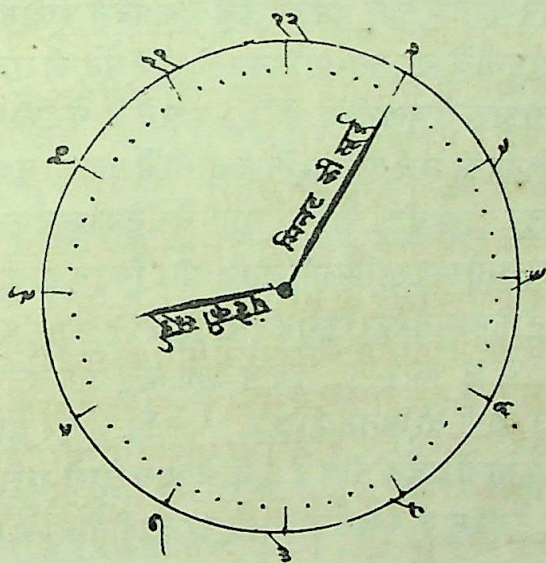
इस कारण जब तीनों मोरी एक साथ चलेंगी तो १ घड़ी में सब पानी का $\frac{१}{५}+\frac{१}{६}+\frac{१}{१०}$ भाग होज़ में भर जायगा

परन्तु तीनों मोरियों की राह से य घड़ी में सब पानी भर जाता है इसलिये एक घड़ी में तीनों मोरियों की राह से सब पानी का $\frac{१}{य}$ भाग होज़ में भर जायगा॥

$$\therefore \frac{१}{५}+\frac{१}{६}+\frac{१}{१०}=\frac{१}{य}$$

$$\frac{६+५+३}{३०} \text{ वा } \frac{१४}{३०}=\frac{१}{य}$$

$$\therefore य=\frac{३०}{१४}=२\frac{१}{७} \text{ घड़ी} \quad ॥$$

(९५) एक विद्यार्थी ने अपने गुरू से पूछा कि कै बजे हैं गुरू ने उत्तर दिया कि २ और ३ के बीच समय है और घंटे की सुई और मिनट की सूई एक स्थान पर है तो बताओ कि

ठीक क्या समय है घड़ी में वृत्त की परिधि के तुल्य ६० भाग होते हैं और जो सूई जितने समय में उन में से एक भाग में चल जाती है उतने समय को मिनट वा २ ३ पल कहते हैं और इस कारण उस सूई को मिनट की सूई बोलते हैं और वह सूई १२ के चिन्ह से चलकर साठों भागों में फिरकर फिर उसी १२ के चिन्ह तक आ जाती है उतने समय को १ घंटा वा २ ½ घड़ी कहते हैं परंतु घंटा बताने के लिये एक और सूई रहती है उसे घंटे की सूई बोलते हैं यह सूई १२ के चिन्ह से १ के चिन्ह तक १२ घंटे में फिर कर आ जाती है इसलिये परिधि के अलग १२ बड़े तुल्य भाग होते हैं उन में से एक भाग में घंटे की सूई एक घंटे में फिरती है और उसी परिधि के छोटे छोटे ६० भाग हैं इसलिये एक बड़े भाग में ६०/१२ वा ५ छोटे भाग होते हैं इस हेतु मिनट की सूई एक घंटा वा ६० मिनट में साठों छोटे भाग में घूम जाती है और घंटे की सूई एक घंटे में ५ छोटे भागों में घूमती है इस कारण मिनट की सूई घंटे की सूई से १२ गुना जलदी चलती है और हर घंटे में घंटे की सूई और मिनट की सूई एक बार मिल जाती है कारण यह है कि मिनट की सूई को नौ गिर्द घूमते में घंटे की सूई कहीं न कहीं चलती अवश्य मिलती होगी और मिनट की सूई हर एक घंटे के अन्त में फिर फिरा कर बारह के चिन्ह पर आ जाती है इस कारण जब घंटे की सूई एक घंटे के चिन्ह पर होगी तो मिनट की सूई १२ के चिन्ह पर होगी इसलिये दोनों सूई के बीच में ५ छोटे भाग होंगे ऐसे ही जब घंटे की सूई २ घंटे के चिन्ह पर होगी तो दोनों सूई

के बीच में १० छोटे भाग होंगे। ऐसे ही और जानो ॥

कल्पना करो कि एक बजे के पीछे मिनट की सूई ने १२ के चिन्ह से य, मिनट तक गति की है तो वह अवश्य य, छोटे भागों में गति करेगी और १२ के चिन्ह से १ घंटे के चिन्ह तक ५ छोटे भागों का अन्तर है इसलिये (य—५) इतने स्थान में घंटे की सूई एक घंटे के चिन्ह से गति करेगी और पहिले लिख ही चुके हैं कि घंटे की सूई से मिनट की सूई १२ गुने स्थान में गति करती है॥

$\therefore$ य = १२ (य—५)

= १२ य—६०

पक्षांतरानयन और योग करने से ११ य = ६०

११ का भाग देनें से य = $\frac{६०}{११}$ = ५ $\frac{५}{११}$

इस कारण एक बजे के उपरान्त ५ $\frac{५}{११}$ मिनट में घंटे और मिनट दोनों की सूई मिल जाती हैं॥

(१६) आगरे से कोयल ३० कोस है और एक घोड़े की डाक आगरे से चलकर कोयल में ६ घंटे में आ पहुंची और जिस समय आगरे की डाक चली उस से एक घंटे पीछे कोयल की डाक चली और वह आगरे तक ७ घंटे में पहुंची तो बतलाओ कि वे दोनों डाक आगरे से कितनी दूर पर सड़क में मिली होंगी॥

कल्पना करो कि दोनों डाक आगरे से य, कोस पर मिलती हैं तो उस मिलने के स्थान से कोयल (३०—य) कोस दूर रह जायगी आगरे की डाक ६ घंटे में ३० कोस तक जाती है इसलिये वह डाक १ घंटे में $\frac{३०}{६}$ वा ५ कोस चलती

उसका कारण अति कठोर हो प्रथम इस जन्म में लट्ठे वा डंडी का बोझ न गिनो ॥

कल्पना करो कि क ग दंड है और अ आधार वा टेक है और क छोर पर के भारी बोझ के उठाने के लिये ग छोर पर हलका बोझ लटकाया गया है और कल्पना करो कि क अ भुज = य हाथ तो अ ग = ६ − य हाथ।

२३ मन ३२ सेर = ५५२ सेर

भारी बोझ के परिमाण ५५२ सेर को उसके आधार की य दूरी से गुणा करो तो घात दंड के एक भुज पर जो भारी बोझ का दबाव होगा उसका परिमाण होगा जैसे ५५२ × य ऐसे ही दूसरे भुज पर जो हलके बोझ का दबाव होगा उसका २४ (६ − य) होगा और जब दंड के दोनो भुज पर समान दबाव होगा तो दंड आधार पर स्थिर रहैगा ॥

इस कारण ५५२ य = २४ (६ − य)

= १४४ − २४ य

पक्षान्तरानयन से ५७६ य = १४४

∴ य = १४४/५७६ = ¼ हाथ = १ गिरह इसलिये जो टेक बड़े बोझ से दो गिरह पर लगाई जाय तो दोनों बोझ दोनों ओर तुले रहैंगे इस कारण जो टेक को बड़े बोझ की ओर हटाकर रक्खो तो बड़ा बोझ उठ जायगा ॥

कारण यह है कि छोटे बोझ का झुकाव अधिक हो जाता है

दूसरे जो लट्ठ वा डंडी ऐसी हो कि वह बराबर एकही गोल हो और उस जगह बोझ में भी एकसी हो अर्थात् उस दण्डी की लकड़ी ऐसी न हो कि उसका एक भाग दूसरे उतने ही बड़े भाग से तोल में अधिक हो ऐसी दण्डी को जो टेक बीच में

थाम्भोगे तो वह उस स्थान पर ठहरी रहेगी अर्थात् दण्डी का गुरुत्व केन्दु उसके ठीक बीच में होगा और पूर्वोक्त प्रश्न में कल्पना करो कि वैसे लड्डवा दण्डी का बोझ २० सेर है ॥

तो ६ हाथ की दण्डी के बीच में ३ हाथ पर गुरुत्व केन्दु का स्थान होगा और इसलिये उसकी दूरी आधार से ३—य होगी ॥

गति विद्या के साध्य के अनुसार जब दोनों बोझ तुले रहेंगे।

तो $$५५२ य = २४(६ - य) + २०(३ - य)$$
$$= १४४ - २४ य + ६० - २० य$$
$$= २०४ - ४४ य$$

पक्षान्तरानयन से $५९६ य = २०४$

५९६ का भाग देने से $य = \frac{२०४}{५९६}$ हाथ $= \frac{२०४ \times ८}{५९६}$ गिरह

$$= \frac{२०४ \times २}{१४९} = २\frac{३}{४} - \frac{१\frac{३}{४}}{१४९}$$
$$= २.७४ \text{ गिरह}$$

इसलिये जो टेक बड़े बोझ से २.७४ गिरह से कम दूरी पर लगाई जाय तो बड़ा बोझ उठ जायगा ॥

तीसरे जो सामान्य दंडी हो जैसी मुसलकड़ी आदि तौलने की दंडी होती हैं और कल्पना करो कि ६ हाथ की दंडी का गुरुत्व केन्दु आधार की ओर दंडी के सिरे से $३\frac{१}{२}$ हाथ पर है तो गुरुत्व केन्दु स्थान आधार से $३\frac{१}{२} - य$ हाथ की दूरी पर होगा और मानो कि दण्डी का बोझ २० सेर है ॥

गति विद्या के साध्य के अनुसार जब दोनों बोझ तुले रहैं

गो तो $$५५२ य = २४(६ - य) + २०(३\frac{१}{२} - य)$$
$$= १४४ - २४ य + ७० - २० य$$

$$= २२५ - ४५७ य$$

पक्षान्तरानयन से ५८६ य = २२५

$$\therefore य = \frac{२२५}{५८६} \quad हाथ = \frac{२२५ \times ८}{५८६} \text{ गिरह}$$

$$= \frac{२२५ \times ४}{२९३} = ३ \frac{३}{५} \text{ गिरह } \frac{१८\frac{२}{५}}{२९३}$$

$$= ३\cdot ०७ \text{ गिरह}$$

इसलिये जो ढेकने से बोझ से ३·०७ गिरह से कम दूरी पर लगाई जाय तो बड़ा बोझ उठ जायगा ॥

(१८) केवल दूध का सजातीय गुरुत्व १·०३ है और पानी मिले दूध का सजातीय गुरुत्व १·०२८५ है तो बतलाओ कि दूध में कितना पानी मिला है ॥

परिभाषा जितने स्थान में एक पदार्थ अम्बाता हो उसमें जितना जल अम्बावे उसके बोझ से जै गुना पदार्थ का बोझ हो उसे उस पदार्थ का सजातीय गुरुत्व कहते हैं ॥

जैसे चाँदी का सजातीय गुरुत्व १०·५ वा १०½ है इससे यह अर्थ है कि जितने स्थान में कुछ चाँदी अम्बाती है उसमें जितना जल अम्बाय उसके १०½ के गुने बोझ के बराबर चाँदी का बोझ होगा ॥ ऐसे ही दूध का १·०३ यह जो सजातीय गुरुत्व लिखा है उसका भी यह अर्थ है कि जितने स्थान में कुछ दूध अम्बाता हो उतने स्थान में जो जल भर दिया जाय तो उसके बोझ से दूध का बोझ १·०३ गुना होगा ॥

कल्पना करो कि य सेर दूध में १ सेर पानी मिला है तो केवल य सेर दूध का बोझ य सेर पानी के १·०३ के गुने बोझ के बराबर होगा ॥

अर्थात

य सेर केवल दूध का बोझ = १.०३ गुणा य सेर पानी का बोझ
= १.०३ × य × १ सेर पानी का बोझ ॥

∴ य सेर = य गुणा १ सेर वा य × १ सेर

इसलिये य सेर दूध में १ सेर पानी मिलाया तो य सेर दूध और एक सेर पानी का बोझ ॥ वा

(य × १) सेर पानी मिले दूध का बोझ = १.०३ × य × १ सेर पानी का बोझ
+ १ सेर पानी का बोझ
= (१ + १.०३ य) × १ सेर पानी का बोझ

परन्तु प्रश्न के अनुसार पानी मिले दूध का सजातीय गुरुत्व १.०२६२५ है वा पानी मिला दूध केवल पानी से बोझ में १.०२६२५ गुना है इसलिये पानी मिले दूध (य + १) सेर का बोझ केवल पानी (य + १) सेर के बोझ से १.०२६२५ गुणा है। अर्थात्

(१) सेर पानी मिले दूध का बोझ = १.०२६२५ × (य + १) सेर केवल पानी का बोझ
= १.०२६२५ × $\overline{य + १}$ × १ सेर पानी का बोझ

∴ (य + १) सेर पानी = (य + १) बार १ सेर पानी ॥
= (य + १) × १ सेर पानी ॥

और आगे लिख ही चुके हैं कि (य + १) सेर पानी मिले दूध का बोझ = (१ + १.०३ × य) × १ सेर पानी का बोझ ॥

∴ (१ + १.०३ × य) × १ सेर पानी का बोझ = १.०२६२५ × $\overline{य + १}$ × १ सेर एक सेर पानी का बोझ इसका भाग देने से

१ + १.०३ × य = १.०२६२५ (य + १)

पक्षान्तरानयन से (१.०३–१.०२६२५) य = १.२६२५–१

योग करने से .००३७५ य = .०२६२५

.००३७५ का भाग देने से य = $\frac{.02625}{.00375}$ = ७

इस से मालूम पड़ता है कि ७ सेर दूध में १ सेर पानी मिला है इसलिये पानी मिले दूध में अष्टमांश पानी है ॥

(२६) एक मनुष्य का नगर ऊँचे पर बसता था उसने कुछ दूर पर बन्दूक छूटती वेर उजाला देखा और इसके २६$\frac{२}{४}$ विपल वा १०$\frac{१}{२}$ सेकण्ड पीछे बंदूक की आवाज सुनी तो बतलाओ कि बंदूक उस मनुष्य से कितनी दूर पर छूटी और मानो कि उजाला १ सेकंड वा २$\frac{१}{२}$ विपल में १९२००० मील चलता है और शब्द १०९० फ़ुट एक सेकंड में पहुंचता है ॥

कल्पना करो कि मनुष्य से य दूरी पर बंदूक छूटी उजाला बंदूक से जितने सकेंड में मनुष्य तक पहुँचा उसका परिमाण त्रैराशिक से निकालते हैं ॥

मील	मील	सेकण्ड	सेकण्ड
१९२००० :	य	:: १	. $\frac{य}{१९२०००}$

३×१७६० या ५२८० फ़ुट का १ मील होता है ॥

शब्द बन्दूक से निकल कर जितने सेकंड में मनुष्य तक पहुँचा उसका परिमाण त्रैराशिक से निकालते हैं ॥

य मील = ३×१७६०×य फ़ुट

फ़ुट	फ़ुट	सेकंड	सेकंड
१०९० :	३×१७६०×य	:: १	: $\frac{३×१७६०×य}{१०९०}$

और प्रश्न के अनुसार उजाला और शब्द के पहुंचने में १०$\frac{१}{२}$ सेकण्ड का अन्तर है ॥

$\therefore$ $\frac{३×१७६०×य}{१०९०}$ — $\frac{य}{१९२०००}$ = १०$\frac{१}{२}$

सो $\dfrac{३ \times २७६ \times १९२०००-१०९}{१०९ \times १९२०००} \times य = १० \dfrac{१}{२}$

$$\therefore य = \dfrac{१०९ \times १९२००० \times १० \frac{१}{२}}{३ \times २७६ \times १९२००० - १०९}$$

$$= \dfrac{२१९७४४०००}{१०१३७५८८१} = २ \dfrac{१}{६} \text{ मील ॥}$$

(२७) सोने का सजातीय गुरुत्व १९ $\frac{१}{४}$ है और चाँदी का सजातीय गुरुत्व १० $\frac{१}{२}$ है और एक सुनार के पास चतुर्थांश घन फुट सोना २६० पौंड वा १३० सेर है तो बतलाओ कि वह केवल सोनाही है वा उस में चान्दी मिली है और जो चान्दी मिली है तो कितना सोना है और कितनी चाँदी है

घन फुट का अर्थ है एक फुट लंबा एक फुट चौड़ा और एक फुट गहरा और १६ औन्स वा ८ छटाँक का एक पौंड वा आध सेर होता है ॥

एक घन फुट पानी में १००० औंस वा ५०० छटाँक बोझ होता है और सुवर्ण पानी से १९ $\frac{१}{४}$ गुना भारी होता है इस लिये १ घन फुट सोना १ घन फुट पानी के बोझ से १९ $\frac{१}{४}$ गुना भारी होगा वा १९ $\times \frac{१}{४} \times$ १००० औन्स वा १९२५० औन्स तोल में होगा और इस कारण $\frac{१}{४}$ घन फुट सोना ४८१२ $\frac{१}{२}$ औन्स वा ३०० पौण्ड और १२ $\frac{१}{२}$ औन्स तोल में होगा और सुनार के पास जो $\frac{१}{४}$ घन फुट सोना है वह २६० पौण्ड तोल में है इस कारण वह केवल सोना ही नहीं है ॥

१ घन फुट चान्दी एक घन फुट पानी के बोझ से १० $\frac{१}{२}$ गुना होती है वा १० $\frac{१}{२} \times$ १००० औंस वा १०५०० औंस तोल में होती है इस कारण $\frac{१}{४}$ घन फुट चान्दी २६२५ औन्स वा १६४ पौन्ड और १ औन्स तोल में होगी और सुनार के पास

जो $\frac{१}{४}$ घनफुट सोना है वह २६० पौण्ड तौल में है इस कारण वह चान्दी से अधिक भारी है और सोने से हलका इसलिये उस सोने में चांदी और सोना दोनों मिले हैं ॥

कल्पना करो कि १ घन फुट का $\frac{१}{य}$ भाग सुवर्ण है तो $\frac{१}{४}-\frac{१}{य}$ भाग चान्दी होगी और ऊपर लिख ही चुके हैं कि १ घन फुट सुवर्ण १९२५० औन्स तौल में होता है इसलिये १ घन फुट का $\frac{१}{य}$ भाग सुवर्ण $\frac{१९२५०}{य}$ औन्स तौल में होगा ऐसेही $\left(\frac{१}{४}-\frac{१}{य}\right)$ भाग चान्दी १०५००$\left(\frac{१}{४}-\frac{१}{य}\right)$ तौल में होगी परन्तु प्रश्न के अनुसार चान्दी और सोना दोनों का बोझ मिलकर २६० पौण्ड वा ४१६० औन्स है ॥

$$\therefore \frac{१९२५०}{य} + १०५००\left(\frac{१}{४}-\frac{१}{य}\right) = ४१६०$$

$$\frac{१९२५०}{य} + \frac{१०५००}{४} - \frac{१०५००}{य} = ४१६०$$

$$\frac{१९२५०}{य} + २६२५ - \frac{१०५००}{य} = ४१६०$$

य से गुणा किया तो १९२५० + २६२५ य − १०५०० = ४१६० य

पक्षांतरानयन और योग करने से १५३५य = ८७५०

$\therefore य = \frac{८७५०}{१५३५} = \frac{१७५०}{३०७}$ इस भिन्न के ३०७ हर के स्थान में आसन्न मान जानने के लिये ३०० रक्खा। तो

$$य = \frac{१७५०}{३००} = \frac{१७५}{३०} = \frac{३५}{६} \therefore \frac{१}{य} = \frac{६}{३५} = \frac{६\times४}{३५\times४}$$

$= \frac{२४}{१४०}$ यह सुवर्ण का परिमाण हुआ और $\frac{१}{४} - \frac{१}{५} =$

$\frac{१}{४} - \frac{६}{३५} = \frac{११}{१४०}$ यह चान्दी का परिमाण हुआ ॥

इसलिये जो १ संपूर्ण घनकुट के १४० तुल्य खण्ड किये जांय तो चतुर्थांश घनकुट में २४ भाग सुवर्ण होगा और ११ भाग चान्दी क्योंकि २४+११=३५×४=१४० ॥

॥ अभ्यास के लिये उदाहरण ॥

(१) वह कौनसी संख्या है कि जो उस संपूर्ण संख्या में उसका आधा जोड़ दें तो योग २४ हो ॥

(२) वह कौन सी संख्या है कि जो उसमें उसके दो तृतीयांश जोड़ दें तो योग २० हो ॥

(३) वह संख्या कौन सी है कि जो उसके आधे और तृतीयांश में ३ का अंतर हो ॥

(४) वह कौन सी संख्या है कि उसका चतुर्थांश उसके पंचमांश से ३ के तुल्य बड़ा हो ॥

(५) एक ऐसी राशि है कि उस में से ६ घटाकर शेष को ६ से गुणा कर घात निकाललो और उस पूर्व राशि में से जो ४ को घटा कर शेष को ८ गुणा कर दो तो यह घात पूर्व घात के तुल्य होजाता है तो बतलाओ कि ऐसी कौन सी राशि है ॥

(६) ४० के दो ऐसे खंड करो कि जो छोटे खण्ड के दशांश को बड़े खण्ड के पंचमांश में से घटावें तो शेष ५ रहजाय ॥

(७) २५ के ऐसे दो भाग करो कि एक भाग दूसरे भाग के तीन चतुर्थांश के तुल्य हो ॥

(८) दो ऐसी राशि निकालो जो बड़ी राशि में छोटी राशि

का भाग दें तो लब्धि ७ मिले और जो बड़ी राशि में से छोटी राशि को घटादो तो भी शेष ७ ही रहे॥

(९) २० रुपयों को ४ लड़कों में इस रीति से बांटें कि सब से बड़े लड़के को दूसरे लड़के से ५ अधिक मिले और दूसरे लड़के को तीसरे लड़के से ५ अधिक मिले और ऐसे ही तीसरे लड़के को चौथे लड़के से ५ सिवाय मिले॥

(१०) ३३ हाथ रस्सी है उसके ऐसे चार टुकड़े करो कि दूसरा टुकड़ा पहिले टुकड़े से १ $\frac{1}{2}$ हाथ बड़ा हो और तीसरा टुकड़ा दूसरे टुकड़े से २ $\frac{1}{2}$ हाथ बड़ा हो और चौथा टुकड़ा तीसरे टुकड़े से ३ $\frac{1}{2}$ हाथ बड़ा हो॥

(११) सर्राफ़ की दूकान पर ७) की अठन्नी और चौअन्नी भुनाने गया और मैंने उससे कहा कि मुझे अठन्नियों से चौअन्नियां दूनी दे तो बतलाओ कि वह मुझे कितनी अठअन्नियां देगा और कितनी चौअन्नियाँ॥

(१२) बराबर दोअन्नी बराबर चौअन्नी बराबर अठअन्नी और बराबर रुपये मिलकर १५) के तुल्य हैं तो बतलाओ कि दोअन्नी चौअन्नी आदि कितनी २ हैं॥

(१३) मेरे पास जितने रुपये हैं उन से पांच गुनी अठन्नियां हैं और सर्वधन २८) रुपये हैं तो बतलाओ कि मेरे पास कितने रुपये हैं और कितनी अठअन्नियाँ॥

(१४) एक लड़के की अवस्था से बाप की अवस्था चौगुनी है परन्तु तीन वर्ष पहिले पिता की अवस्था लड़के की अवस्था से सातगुनी थी तो बतलाओ कि हर एक की क्या अवस्था है॥

(१५) एक मनुष्य के दो पुत्र हैं उन में बड़ा पुत्र छोटे पुत्र

से २ वर्ष बड़ा है और दोनों पुत्रों की अवस्थाओं का योग पिता की अवस्था के तुल्य है और जो पिता की अवस्था में बड़े पुत्र की चतुर्थांश अवस्था जोड़ दें तो उसकी ८० वर्ष की अवस्था होजाय तो बतलाओ कि हर एक की अवस्था क्या होगी॥

(२६) एक पुरुष और स्त्री की अवस्था मिलकर ८० वर्ष की है और २० वर्ष पहिले स्त्री की अवस्था पुरुष की अवस्था का दो तृतीयांश थी तो बतलाओ कि हर एक की अवस्था क्या है॥

(२७) एक ऐसा भिन्न है कि उसका हर अंश से १ के तुल्य बड़ा है और जो अंश में से १ घटा दो और हर में एक जोड़ दो तो भिन्न $\frac{१}{२}$ के तुल्य होजाता है तो बतलाओ कि पूर्व भिन्न कौनसा है॥

(२८) एक ऐसा भिन्न है कि उसका अंश हर से २ के तुल्य छोटा है और जो अंश में से १ घटा दो और हर में अंश जोड़ दो तो भिन्न $\frac{१}{४}$ के तुल्य होजाता है तो बतलाओ कि पूर्व भिन्न कौनसा है॥

(२९) एक विद्यार्थी से पूछा कि तू एक संख्या के आधे में ४ का भाग दे और दूसरी आधी संख्या में ६ का भाग दे और दोनों लब्धियों का योग बतला दे तो उस विद्यार्थीने शीघ्रता से एक ही बार उत्तर लाने के लिये संपूर्ण संख्या में ५ का भाग दिया परंतु इस लब्धि से शुद्ध उत्तर २ के समान बड़ा है तो बतलाओ कि वह कौनसी संख्या है॥

(२०) १२ बजे के उपरान्त घंटे की सुई ठीक मिनट की सुई के सन्मुख है तो बतलाओ कि १२ पै कितने मिनट व्यतीत हुए

हैं ॥

(२१) एक मनुष्य के पास घड़ी थी उससे जब मैंने पूछा कि के बजे हैं तो उसने मेरी परीक्षा करने के लिये उत्तर दिया कि ५ और ६ बजे के बीच में समय है और घंटे की सुई और मिनट सुई एक स्थान पर है तो बतलाओ कि ५ पै कितने मिनट व्यतीत हुए होंगे ॥

(२२) एक मनुष्य को आवश्यक काम के लिये एक ८ कोस गाँव है वहाँ भेजा परंतु उस्से कुछ कहना बाक़ी रह गया था इसलिये उसे लौटाने के अर्थ १ घड़ी पीछे से दूसरा मनुष्य भेजा पहिला मनुष्य इस परिमाण से चलता था कि वह ४ कोस ६ घड़ी में पहुँच जाता और दूसरा मनुष्य ४ $\frac{1}{2}$ कोस ६ घड़ी में पहुँच जाता तो बतलाओ कि दूसरे मनुष्य को पहिला मनुष्य गाँव से कितनी दूर पर मिलेगा ॥

(२३) एक हौज़ में तीन मोरियों की राह से २० पल में ८२० मन पानी भर जाता है और तीसरी मोरी में होकर जितना जल एक पल में आता है उस्से १ मोरी में तो ५ मन पानी हर पल में कमती आता है और दूसरी मोरी में हर पल में १० मन पानी अधिक आता है तो बतलाओ कि हर एक मोरी की राह से हर पल में कितना जल हौज़ में गिरता है ॥

(२४) एक आदमी और लड़के ने १ खेत काटने को २१ आने का ठेका लिया परंतु जब संपूर्ण काम का दो पंचमांश हो गया तब लड़का बैठ रहा और आदमी अकेले ने काम समाप्त किया और जितने दिनों में वे मिलकर काम करते उन से १ $\frac{1}{4}$ दिन अधिक लगा और लड़का आदमी से आधा काम करता इसलिये लड़के को मर्द से आधी मजदूरी मिलती तो

बतलाओ कि दोनों को क्या रोज़ मिलता होगा॥

॥१ अभ्यास के लिये परिभाषा संबंधी जो प्रश्न हैं उनके उत्तर नीचे लिखे हैं॥

प्रश्न	उत्तर	प्रश्न	उत्तर	प्रश्न	उत्तर	प्रश्न	उत्तर
(१)	३०	(५)	१३	(९)	३८	(१३)	३अ
(२)	६	(६)	३५	(१०)	६२	(१४)	६अक
(३)	७	(७)	६२	(११)	०	(१५)	६ब
(४)	०	(८)	१०	(१२)	२		

(१६) २, २क, कय, ३कय, य, यय, पय, कयर

(१७)	५	(२१)	३०	(२५)	२	(२९)	३
(१८)	११	(२२)	१०	(२६)	१३	(३०)	म+न−५
(१९)	१२	(२३)	८	(२७)	१४		
(२०)	७	(२४)	३	(२८)	१ ३१/४२		

॥२ अभ्यास के लिये परिभाषा संबंधी जो प्रश्न हैं उनके उत्तर नीचे लिखे हैं॥

प्रश्न	उत्तर	प्रश्न	उत्तर	प्रश्न	उत्तर	प्रश्न	उत्तर
(१)	१८	(५)	०	(९)	२	(१३)	३म+६न −४प
(२)	०	(६)	४९ १/९	(१०)	६	(१४)	४
(३)	११४	(७)	२३	(११)	२३	(१५)	−२
(४)	६५७	(८)	म+८न−६४प	(१२)	१	(१६)	−१

॥३॥ अभ्यास के लिये जो योग संबंधी उदाहरण हैं उनके

उत्तर नीचे लिखे हैं॥

प्रश्न	उत्तर	प्रश्न	उत्तर
(१)	२अ+२क	(१९)	१+५अ
(२)	२अ	(२०)	२अ+६ग
(३)	२अ−२क	(२१)	३ल−२र
(४)	२अ	(२२)	३अ^{२}+अक−२क^{२}
(५)	२अ+२ग	(२३)	६−५य
(६)	१+म+न	(२४)	२अग+२कघ
(७)	७म−१	(२५)	२अय−२कर
(८)	४पर+४प	(२६)	२य^{३}+२अ^{३}
(९)	प−२व+८	(२७)	अ^{२}+क^{२}+ग^{२}
(१०)	६अक−कग+कप	(२८)	य^{२}+यर+र^{२}+मय+नर
(११)	मन+म−न+१		
(१२)	३अय+२कर	(२९)	५य^{२}र−३अयर−अ^{२}य+य^{३}
(१३)	५अ−५क+५ग		
(१४)	७यर−य−४	(३०)	$\frac{३}{२}$अघ+$\frac{३}{२}$कघ−गघ^{२}+$\frac{१}{२}$अक−अग
(१५)	३व−२प+पव		
(१६)	२प^{२}+२व^{२}		
(१७)	८अक+अग−१		
(१८)	४य+३र		

॥४ अभ्यास के लिये व्यवकलन संबंधी जो उदाहरण हैं उनके उत्तर नीचे लिखे हैं॥

प्रश्न	उत्तर	प्रश्न	उत्तर
(१)	अ−क+प	(३)	५अ−२ग
(२)	२क−२ग	(४)	८अ−७क

(५) $य - र - ९ल$

(६) $अय + २कर - २ग$

(७) $कग - २अक + २अ^2$

(८) $२य^2$

(९) $यर - ५य^2 + ५र^2$

(१०) $मन + ४म - ४न$

(११) $यर + ३मय$

(१२) $३अकग - ३अक - २अग - १$

(१३) $क^2 + ३ग^2$

(१४) $२अय - २अ^2 - २य^2$

(१५) $२अ^2क + २अ^2ग + २ग^2$

(१६) $२यर + अ - १$

(१७) $\frac{१}{२}अय - यर + १$

(१८) $\frac{१}{२}अ + \frac{३}{२}क - \frac{१}{२}ग$

॥ ५ अभ्यास के लिये गुणन संबंधी जो उदाहरण हैं उनके उत्तर नीचे लिखे हैं॥

प्रश्न	उत्तर	प्रश्न	उत्तर
(१)	$अकयर$	(१२)	$२अ^2कर - क^2यर + कयर$
(२)	$-३मनप$	(१३)	$अक^2 + कय + अर + यर$
(३)	$३म + ३न - ३प$	(१४)	$६य^2 - २य - ४$
(४)	$अपय + कपय^2$	(१५)	$य^2 - य - १२$
(५)	$२अ^2ब + ४अकब$	(१६)	$६य^2 - १९य + १०$
(६)	$४अ^3य - २अ^2य^2र^2$	(१७)	$१ - य^2$
(७)	$-३प^2र + २प^2र^2 - ६पर$	(१८)	$य - ३य^2 + २य^3$
(८)	$-३न + ६न^2अय - ९नकय$	(१९)	$२अय^2 + २कयर - अयर - कर^2$
(९)	$-४अकय + ६अगय - १० कबय$	(२०)	$अ^2 - अय - ६य^2$
(१०)	$१४य^2र - २१य$	(२१)	$३५य^2 - ३२य + ४$
(११)	$४अय^2रल + २काय^2ल - २गयरल^2$	(२२)	$८अयर - १२कर^2 - ६अ^2य + ९कयर$

(२३) $२म+न-४म^२न-२मन^२$ (२८) $अ^४-१$

(२४) $अ^३ग-अकग^२-अक^२$ (२९) $य^४-अ^४$
$+क^३ग$ (३०) $८य^३+२७$

(२५) $य-र+२य^२+यर-३र^२$ (३१) $१६+४य^२+य^४$

(२६) $अक+कय-कर-अय$ (३२) $अ^४-२अ^३य+२य^४$
$र-यर+र^२$ (३३) $य^४-८१$

(२७) $२अग^२-२अकग+क^२$ (३४) $४अ^८य^४-९क^४र^२$
$ग+२अ^३य+अकय$ (३५) $४अ^४-८अ^२क^२+६अ^३क^३$
$-क^४$

॥६ अभ्यासकेलियेभागसंबंधीजोउदाहरणहैं उनकेउत्तरनीचेलिखेहैं

प्रश्न	उत्तर	प्रश्न	उत्तर	प्रश्न	उत्तर
(१)	य	(१०)	२अयर	(१९)	य+१
(२)	७	(११)	−२४नय	(२०)	ग+घ
(३)	७य	(१२)	२कय	(२१)	३−क
(४)	अ	(१३)	३ग−२कघ	(२२)	२अ−५य
(५)	३य	(१४)	२ग−कघ	(२३)	अ+२
(६)	अ	(१५)	−४य+३र	(२४)	२अक
(७)	−अर	(१६)	१+८अघ−२कग	(२५)	३य−५
(८)	−अर	(१७)	−२अय+४क+२	(२६)	$३य^२-य+२$
(९)	−३अ	(१८)	$अ^२-५कय+६य^२$	(२७)	अ−क−ग

(२८) $५अ^२+३य^२$

(२९) $प^२व+४पव^२+२व^३$

(३०) $अय^२-कय^२-अ^२य+अकय+अ^३-अ^२क$

(३२) $\text{१६ य}^{४} - \text{२४ य}^{३} + \text{३६ य}^{२} - \text{५४ य} + \text{८१}$

॥ ७ अभ्यास के लिये सम महत्तमापवर्त्तक संबंधी जो प्रश्न हैं उन के उत्तर नीचे लिखे हैं ॥

प्रश्न	उत्तर	प्रश्न	उत्तर	प्रश्न	उत्तर
(१)	४	(६)	अपय	(११)	अयर
(२)	२५	(७)	५अकय	(१२)	$\frac{\text{२}}{\text{५}}$ अ
(३)	२०	(८)	$\text{३अ}^{२}\text{क}^{२}$	(१३)	व
(४)	य	(९)	$\text{६अ}^{४}\text{क}^{३}\text{ग}^{६}$	(१४)	य
(५)	$\text{कय}^{२}$	(१०)	७मनप		

॥ लघुसमापवर्त्य संबंधी प्रश्नों के उत्तर नीचे लिखे हैं ॥

प्रश्न	उत्तर	प्रश्न	उत्तर	प्रश्न	उत्तर
(१५)	१६८	(१९)	२५२०	(२३)	२४ग
(१६)	२४०	(२०)	४२५०४	(२४)	अकग
(१७)	५६	(२१)	अकय	(२५)	$\text{२य}^{२}\text{र}^{२}$
(१८)	१६८	(२२)	२अपर	(२६)	$\text{कग}^{२}\text{घ}$

॥ ८ अभ्यास के लिये भिन्न लघुतम रूप करने के जो उदाहरण हैं उन के उत्तर लिखते हैं ॥

प्रश्न	उत्तर	प्रश्न	उत्तर	प्रश्न	उत्तर
(१)	$\frac{\text{२अ}}{\text{३}}$	(५)	$\frac{\text{५य}^{२}}{\text{अ}}$	(९)	$\frac{\text{२अ}+\text{३}}{\text{क}}$
(२)	२क	(६)	$\frac{\text{१}}{\text{२कय}}$	(१०)	$\frac{\text{२क}+\text{१}}{\text{अ}}$
(३)	$\frac{\text{४कय}}{\text{३अ}}$	(७)	$\frac{\text{म}-\text{न}}{\text{मन}}$	(११)	$\frac{\text{३अ}-\text{२य}}{\text{२अ}-\text{३य}}$
(४)	$\frac{\text{कय}}{\text{२}}$	(८)	$\frac{\text{२य}-\text{३}}{\text{५}}$	(१२)	$\frac{\text{न}-\text{म}+\text{प}}{\text{म}-\text{न}+\text{प}}$

॥ ६ अभ्यास के लिये भिन्न के जोड़ने और घटाने के उदाहरणों के उत्तर लिखते हैं॥

प्रश्न	उत्तर	प्रश्न	उत्तर
(१)	$\frac{६य}{५}$	(१६)	$\frac{कगय+अगर+अकल}{अकग}$
(२)	$\frac{५अक}{६}$	(१७)	$\frac{अयर+गयर}{अकग}$
(३)	$\frac{३अ+१}{३}$	(१८)	०
(४)	$\frac{२अ}{५}$	(१९)	$\frac{य}{१०}$
(५)	$\frac{६य-४}{७}$	(२०)	$\frac{य}{८}$
(६)	$\frac{१०य-२}{२१}$	(२१)	$\frac{१}{२}$
(७)	$\frac{६}{अ}$	(२२)	$\frac{य+५}{८}$
(८)	$\frac{६}{अक}$	(२३)	$\frac{५य-र-२}{१०}$
(९)	$\frac{य^२+र^२+२यर}{य^२ र^२}$	(२४)	$\frac{४य+१६}{य+१}$
(१०)	$\frac{कग+२ग+३}{अकग}$	(२५)	$\frac{२}{य}$
(११)	$\frac{१९य-२३}{६}$	(२६)	$\frac{२य^२+य}{य^२+३य+२}$
(१२)	$\frac{३४य-२३}{१२}$	(२७)	$\frac{५य+३५}{४२}$
(१३)	$\frac{५४य-१३}{५०}$	(२८)	$\frac{२७य-३४}{५०}$
(१४)	$\frac{६१}{१५य}$	(२९)	$\frac{अगय}{क^२+कगय}$
(१५)	$\frac{४१}{२०र}$	(३०)	$\frac{य^२+र^२}{यर+र^२}$
		(३१)	$\frac{१}{१+य^२+२य}$
		(३२)	$\frac{४यर}{य^२-र^२}$

(३१) य=७ (३२) य=९ (३५) य=४

(३३) य=२ (३४) य=७ (३६) य=८

॥१३ अभ्यास के लिये कोष्ठ संबंधी समीकरण के जो उदाहरण लिखे हैं उनके उत्तर लिखते हैं

प्रश्न	उत्तर	प्रश्न	उत्तर	प्रश्न	उत्तर
(१)	य=५	(५)	य=$६\frac{१}{२}$	(९)	य=१४
(२)	य=५	(६)	य=$४\frac{७}{८}$	(१०)	य=८
(३)	य=$\frac{२}{३}$	(७)	य=३	(११)	य=७
(४)	य=१०	(८)	य=७	(१२)	य=२

॥१४ अभ्यास के लिये भिन्न संबंधी जो समीकरण॥ लिखे हैं उनके उत्तर लिखते हैं॥

प्रश्न	उत्तर	प्रश्न	उत्तर	प्रश्न	उत्तर
(१)	य=$\frac{१}{६}$	(४)	य=१८	(७)	य=८
(२)	य=$\frac{१}{२०}$	(५)	य=८	(८)	य=१२
(३)	य=$\frac{५}{अक}$	(६)	य=८	(९)	य=$\frac{२}{४}$
				(१०)	य=२

॥१५) अभ्यास के लिये एक वातएक वर्ण समीकरण संबंधी जो प्रश्न लिखे हैं उनके उत्तर लिखते हैं

प्रश्न	उत्तर	प्रश्न	उत्तर
(१)	१६	(५)	२०
(२)	१२	(६)	२० और ३०
(३)	१८	(७)	$१०\frac{५}{७}$ और $१४\frac{२}{७}$
(४)	६०	(८)	$१\frac{२}{६}$ और $८\frac{२}{६}$

प्रश्न	उत्तर
(९)	६।।), ५।।), ४।।), ३।।)
(१०)	५, ६$\frac{१}{२}$ ८ और ११$\frac{१}{२}$ हाथ
(११)	१० अठन्नी और २० चौअन्नी
(१२)	८
(१३)	८ और ४०
(१४)	२५ और ६ वर्ष
(१५)	३५, ३६, और ७१
(१६)	४४ और ३६
(१७)	$\frac{४}{५}$
(१८)	$\frac{३}{५}$
(१९)	२४०
(२०)	७ $\frac{३}{११}$ मिनट १ बजे पहिले
(२१)	२७ $\frac{३}{११}$ मिनट ५ बजे उपरांत
(२२)	२ कोस
(२३)	२२, ७, १२ मन
	≡) ४ $\frac{८}{२५}$ पाई
	और =) ८ $\frac{४}{२५}$ पाई

शुभं भवतु

इति बीज गणित प्रथम भागः समाप्तः

॥ २० अभ्यास के लिये भिन्न के गुणाभाग के जो उदाहरण हैं उन के उत्तर नीचे लिखते हैं ॥

प्रश्न	उत्तर	प्रश्न	उत्तर	प्रश्न	उत्तर
(१)	$\frac{३य}{२}$	(२१)	$\frac{य}{२}$	(३७)	अक
(२)	३य	(२२)	$\frac{३य}{२०}$	(३८)	$\frac{अ^३-य^३}{अ^२+य}$
(३)	$\frac{५य}{२}$	(२३)	$\frac{य}{८}$	(३९)	$\frac{२य+१}{य-२}$
(४)	२य	(२४)	$\frac{३य}{४र}$	(४०)	$\frac{२-३य+य^२}{यर}$
(५)	२अ − २य	(२५)	$\frac{म}{प}$	(४१)	$\frac{२क-६अ}{४-य}$
(६)	२८य	(२६)	$\frac{१-२र}{र}$	(४२)	$\frac{४-य}{४}$
(७)	८य	(२७)	$\frac{१+२क}{४}$	(४३)	$\frac{१}{१-य}$
(८)	६य − २५	(२८)	$\frac{५र^२}{२ल}$	(४४)	$\frac{१}{य}$
(९)	६० + ४५य	(२९)	$-\frac{२क^२}{३}$	(४५)	$\frac{अ^२-अय}{क}$
(१०)	१६ − १४य	(३०)	$\frac{२अय^२}{कग}$	(४६)	$\frac{अ^२+अय+य^२}{अ^२-अय+य^२}$
(११)	७२य + १५६	(३१)	$य^२+२+\frac{१}{य^२}$		
(१२)	४य − २	(३२)	$र+\frac{१}{र}+२$		
(१३)	६य + ८	(३३)	$\frac{१}{१-य^२}$		
(१४)	३य − ५	(३४)	१		
(१५)	१० − य	(३५)	$\frac{म^२-३म+२}{६}$		
(१६)	$\frac{३य}{४}$	(३६)	$\frac{३}{४}+\frac{१}{२}\cdot\frac{क^२}{अ^२}-\frac{१}{२}\cdot\frac{अ^२}{क^२}$		
(१७)	$य^२$				
(१८)	$\frac{२-३य}{५}$				
(१९)	$\frac{१}{य^२}$				
(२०)	$य^२+र^२$				